N° d'Ordre : 89

THESE

présentée

à l'Unité d'Enseignement et de Recherches de Sciences Exactes et Naturelles
de l'Université de Besançon.

Pour obtenir
le Doctorat de Spécialité, mention Mathématiques Pures,
par

Alain FOUGERES :

" QUELQUES PROPRIETES DES LIMITES PROJECTIVES ET INDUCTIVES, ET LEUR APPLICATION A UNE GENERALISATION DES ESPACES DE SOBOLEV "

- 5 DEC 1969

Soutenue en ~~Novembre~~ 1969 devant la Commission d'Examen :

Jury : MM. F . CHATELET professeur : Président

R . GERBER professeur
J . ROBERT professeur
J.C. MIELLOU chargé d'enseignement
} Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547627_0008

N° d'Ordre : **89**

THESE

présentée

à l'Unité d'Enseignement et de Recherches de Sciences Exactes et Naturelles
de l'Université de Besançon.

Pour obtenir

le Doctorat de Spécialité, mention Mathématiques Pures,

par

Alain FOUGERES :

" QUELQUES PROPRIETES DES LIMITES PROJECTIVES ET INDUCTIVES, ET LEUR APPLICATION A UNE GENERALISATION DES ESPACES DE SOBOLEV "

- 5 DEC. 1969

Soutenue en ~~Novembre~~ 1969 devant la Commission d'Examen :

Jury : MM. F . CHATELET professeur : Président

R . GERBER professeur
J . ROBERT professeur
J.C. MIELLOU chargé d'enseignement
} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE BESANCON - FACULTE DES SCIENCES

==========

Doyens honoraires : MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN

Professeurs honoraires : MM. BAILLAUD, DUFFIEUX, THIRY, TRILLAT, UEBERSFELD, VINCENSINI

Maître de conférences honoraire : M. GRANIER

Doyen	M.	THIEBAUT	Pétrographie Min.
Assesseur	M.	BERNARD	Physique Chimie
Professeurs	MM.	TRONCHET	Botanique
		CHATELET	Mathématiques
		PERROT	Chimie Générale
		PLUVINAGE	Physique Théorique
		DREYFUSS	Géologie Minéralogie
		MESNAGE	Chronométrie
		THEOBALD N.	Géologie historique
		QUANTIN	Botanique
		CHALEAT	Mécanique Appliquée
		RIPPLINGER	Physiologie Animale
		VIENOT	Physique Générale
		GOMOT	Zoologie
		ARBEY	Astronomie
		GALATRY	Physique Moléculaire
		THEOBALD J.G.	Spectroscopie hertz.
		DEVIN	Chimie Générale
		CERUTTI	Chimie
Professeur associé	M.	DEFIX	Mécanique Appl.
Professeurs sans chaire	MM.	POTIER	Physique des Sol.
		REAL	Biologie animale
		VALLEE	Mathématiques Appl.
		GOUARNE	Mathématiques
		PARIZET	Mathématiques
		MERIGOUX	Physique
		ROBERT J.	Mathématiques
Maîtres de conférences	MM.	OLIVIER	Physique
		BANTEGNIE	Mathématiques
		ROBERT D.	Physique
		BIDAULT	Botanique
		CHAUVE	Géologie
		GAUDEMER	Biochimie
		MONTAGNER	Psycho-Physiologie
Chargés d'enseignement	MM.	HELLEGOUARCH	Mathématiques
		MIELLOU	Calcul Numérique
		RUEDIN	Mathématiques
		LHOTE	Chronométrie
		BULABOIS	Physique Générale
		LAUDE	Chimie
Conseiller administratif	M.	LAMBERT	

Je remercie Monsieur François Châtelet qui a bien voulu me faire l'honneur de présider la Commission d'Examen .

Je tiens à remercier Monsieur Robert Gerber pour le vif intérêt qu'il a porté aux résultats obtenus .

Je remercie tout particulièrement Monsieur Jacques Robert pour l'intérêt constant qu'il a porté à l'élaboration de cette étude, et pour les remarques efficaces qu'il y a apportées .

Je remercie également Monsieur Jean-Claude Miellou qui a suivi avec sympathie le déroulement de ce travail .

Je remercie enfin Mademoiselle Thérèse Paris qui a transformé mes notes manuscrites en un remarquable texte multigraphié .

INTRODUCTION

L'étude des solutions d'équations aux dérivées partielles conduit à se fixer a priori un espace fonctionnel, et à chercher s'il existe des solutions appartenant à cet espace ; le choix de cet espace est fonction de ses propriétés autant que de l'équation considérée .

Dans ce but, Sobolev a introduit en 1937 l'espace des fonctions numériques f , définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, dont le carré est intégrable, et dont les dérivées partielles $\partial f / \partial x_i$ (définies presque partout) sont elles-mêmes de carré intégrable, ainsi que toutes les dérivées $D^\alpha f$ jusqu'à un certain ordre de dérivation m .

L'utilisation des distributions de Schwartz est rendue possible par le fait que pour $p \geq 1$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de distributions ; comme toute distribution est dérivable (au sens des distributions), et que la dérivée, au sens des distributions, d'une fonction f, coïncide avec sa dérivée usuelle partout où celle-ci est définie, cela permet de considérer les espaces de Sobolev comme les espaces :

$$H^m(\Omega) = \{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) : (\forall |\alpha| \leq m)(D^\alpha f \in L^2(\Omega)) \}$$

et de définir de façon analogue, pour $p \geq 1$, les espaces $H^{p,m}(\Omega)$ à partir des espaces $L^p(\Omega)$.

Ces espaces ont été l'objet de nombreuses généralisations : espaces de Sobolev avec poids en considérant des espaces de fonctions p-intégrables pour une mesure autre que celle de Lebesgue, espaces non isotropes en prenant les dérivées $D^\alpha f$ dans des espaces $L^{p_\alpha}(\Omega)$ différents , et bien d'autres espaces de même type, ayant des propriétés similaires .

En particulier, dans l'étude des équations aux dérivées partielles, non linéaires, de la forme :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha A_\alpha(x, (D^\beta u(x))_{|\beta| \leq m}) = f$$

dites " équations quasi-linéaires", introduites par Višik [20], Leray et Lions [13] obtiennent, en utilisant les propriétés des applications demi-monotones [2], des théorèmes d'existence de solutions dans les espaces de Sobolev classiques, sous la condition que les opérateurs A_α soient de type polynomial ; ils signalent à la fin de leur article que dans le cas où les A_α sont de type exponentiel, il est naturel d'utiliser les espaces d'Orlicz [12], et d'introduire des espaces construits à partir de ceux-ci de la même façon que les espaces de Sobolev $H^{p,m}(\Omega)$ à partir des $L^p(\Omega)$. En calquant les démonstrations des propriétés des $H^{p,m}(\Omega)$, on démontre en effet que ces espaces de Sobolev-Orlicz ont des propriétés de même type que celles des espaces de Sobolev classiques .

Le fait que l'on puisse ainsi, à partir des mêmes techniques de démonstration, obtenir des espaces ayant des propriétés analogues, nous a conduit à rechercher une formulation générale qui puisse s'appliquer à toute construction de ce type .

Dans la définition des espaces de Sobolev à l'aide des distributions, si nous introduisons l'opérateur :

$$h_m : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega)^{c(m)} \\ x' \longrightarrow (\mathfrak{D}^\alpha x)_{|\alpha| \leq m} \end{array} \right.$$

(où $c(m) = \text{card}\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\}$), l'espace de Sobolev $H^{p,m}(\Omega)$ se présente comme l'image réciproque par h_m de $(L^p(\Omega))^{c(m)}$, et sa topologie usuelle comme limite projective par h_m de l'espace vectoriel normé produit correspondant ; d'où le nom d'opérateur " <u>projectif</u> " donné à h_m .

Cette formulation a l'avantage, en conservant le même opérateur, de s'appliquer aux espaces d'Orlicz, considérés comme espaces de distributions, ou à tout autre espace du même type .

De plus, l'analogie existant entre les caractérisations topologiques des duals des différents espaces de Sobolev classiques suggère l'introduction d'un autre opérateur, appelé " <u>inductif</u> " :

$$k_m : \left| \begin{array}{l} \mathfrak{D}'(\Omega)^{c(m)} \longrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega) \\ (x'_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \longrightarrow \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha x'_\alpha \end{array} \right.$$

et de l'espace image par k_m de $(L^p(\Omega))^{c(m)}$, muni de la topologie limite inductive correspondante. Ces deux opérateurs h_m et k_m ne sont pas indépendants, et l'on peut dire (abusivement) que la transposée topologique de l'un est du type de l'autre (cf. chapitre III th.2) .

Deux faits motivent le degré de généralisation de cette étude . Le premier est que la famille d'opérateurs de dérivations $\Lambda_m = (D^\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ peut être remplacée par une famille quelconque Λ d'opérateurs linéaires continus de $\mathcal{D}'(\Omega)$, pourvu qu'elle contienne l'identité ; nous appellerons une telle famille Λ " famille de Sobolev ", et nous y associons les opérateurs " projectif " et " inductif ", h_Λ et k_Λ , correspondant à h_m et k_m. (Dans le cas où Λ est infinie, il est naturel de remplacer dans la définition de k_Λ le produit d'espaces par la somme directe) .

Le deuxième motif de généralisation est que certains espaces de distributions non normés ont une structure analogue aux espaces de Sobolev construits à partir des $L^p(\Omega)$ ou des espaces d'Orlicz ; cela nous conduit à associer à une famille de Sobolev Λ et à une famille d'espaces de distributions, $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, non nécessairement normés, les espaces :

$$H(\Lambda ; E_\lambda) = h_\Lambda^{-1}\Big(\prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \Big) \quad \text{et} \quad K(\Lambda ; E_\lambda) = k_\Lambda\Big(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \Big)$$

appelés respectivement " espaces projectif et inductif de Sobolev, associés au système de Sobolev " :

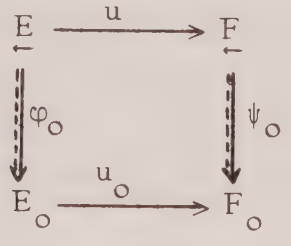
$$\Sigma(\Lambda) = (\Lambda , h_\Lambda , k_\Lambda , (E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$$

Nous pouvons de plus, sans aucune complication supplémentaire, remplacer l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ par le dual topologique D' d'un e.v.t. localement convexe D ,muni d'une $\mathcal{E}$-topologie séparée , et les espaces de distributions E_λ par des e.v.t. localement convexes inclus topologiquement dans $D'_{\mathcal{E}}$ (i.e. tels qu'il existe une injection linéaire continue $i_\lambda : E_\lambda \longrightarrow D'_{\mathcal{E}}$) . Au lieu de l'espace des distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, le cadre d'étude pourra tout aussi bien être par exemple celui des distributions sur un groupe localement compact [3], celui des fonctionnelles analytiques ou celui des séries entières à n indéterminées [19] .

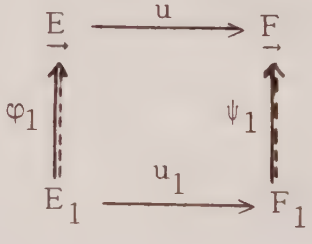
Enfin, l'étude des propriétés des espaces ainsi obtenus, et notamment des propriétés de dualité , nous a conduit à exprimer en termes d'applications les notions classiques de limites projective et inductive, et à dégager certains résultats touchant ces limites, et concernant l'homomorphie, dont nous préciserons la nature ci-dessous .

Le plan de cette étude est le suivant :

- Dans le premier chapitre , nous rappelons les définitions et quelques résultats classiques concernant les limites projectives et inductives, puis nous nous intéressons plus spécialement aux limites projectives et inductives associées à une seule application, et à leur lien avec la notion d'homomorphie , notamment à des théorèmes de transfert d'homomorphie (th.9,10,11,14,15) relevant de la situation suivante : si l'on a le diagramme linéaire commutatif suivant :



(resp.



)

où $\overleftarrow{E}$ et $\overleftarrow{F}$ sont limites projectives de E_o et F_o associées à φ_o et ψ_o (resp. $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ limites inductives de E_1 et F_1 associées à φ_1 et ψ_1) sous quelles conditions l'homomorphie de u_o (resp. u_1) entraîne celle de u ou réciproquement .

- Le second chapitre est consacré aux espaces de Sobolev pro - jectifs et inductifs. Une " famille de Sobolev " Λ, les homomorphismes projectif et inductif associés h_Λ, k_Λ, et une famille, indexée par Λ, d'espaces localement convexes inclus topologiquement dans un même dual topologique séparé $D'_{\mathcal{C}}$ d'un espace localement convexe D donné, constituent un "système de Sobolev ", auquel sont associés deux "espaces de Sobolev", l'un "projectif", l'autre " inductif " :

l'espace de Sobolev " projectif " $\underleftarrow{H(\Lambda ; E_\lambda)}$ est l'image réciproque par h_Λ de $\Pi_\lambda E_\lambda$, muni de la topologie limite projective du produit vectoriel topologique $\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}$; et l'espace de Sobolev " inductif " $\underrightarrow{K(\Lambda ; E_\lambda)}$ est l'image directe par k_Λ de $\oplus_\lambda E_\lambda$, muni de la topologie limite inductive de la somme directe topologique $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$.

Après avoir donné divers exemples d'applications, on étudie les propriétés de ces espaces de Sobolev, et notamment la façon dont ils conservent les propriétés topologiques que peuvent avoir les espaces E_λ dont ils sont issus .

- Le troisième chapitre est axé sur la généralisation aux espaces de Sobolev projectifs qui viennent d'être définis, des propriétés de dualité des espaces de Sobolev classiques, complétée par des résultats de dualité sur les espaces de Sobolev inductifs. Les résultats algébriques de dualité se généralisent effectivement, mais du point de vue topologique, le passage des espaces vectoriels normés , aux espaces localement convexes présente une difficulté, due à la non-application du théorème de Banach-Schauder (responsable, dans le cas des e.v.n., de l'homomorphie de la transposée topologique d'un homomorphisme) et à la quasi nécessité de la " condition de Mackey ", indiquée par Grothendieck [7], dans l'étude topologique du dual d'un sous-espace vectoriel topologique. Nous obtenons alors un résultat analogue au théorème classique dans le cas où les espaces de Sobolev projectif et inductif correspondants sont normés, ou semi-réflexifs ; dans le cas général, nous obtenons un résultat du même type, en remplaçant les topologies de dual fort par les topologies de Mackey .

Nous terminons ce chapitre en donnant, sous forme d'exemples, outre les propriétés des espaces de Sobolev classiques et espaces dérivés, des théorèmes de structure de dualité pour certains espaces de distributions.

Pour faciliter une lecture rapide, les pages importantes pour la compréhension du texte sont signalées par des astérisques ; de même, les titres des théorèmes principaux sont en lettres majuscules .

- TABLE DES MATIERES -

Chapitre I : Quelques propriétés des limites projectives et inductives .

1ère partie : Etude classique des limites projectives et inductives .

I.1 : Définition et propriétés classiques des limites projectives 2
I.2 : Définition et propriétés classiques des limites inductives 8

2ème partie : Etudes des limites projectives et inductives associées à une seule application.

I.3 : Problèmes de continuité 17
I.4 : Problèmes d'homomorphie 23
I.5 : Utilisation de la notion de supplémentaire topologique 37
I.6 : Application de la théorie de la dualité à un problème d'homomorphie 45

Chapitre II : Généralisation axiomatique des espaces de Sobolev .

II.1 : Définition des familles, systèmes et espaces de Sobolev.
A. Familles et homomorphismes de Sobolev 50
B. Systèmes et espaces de Sobolev 54

II.2 : Propriétés structurales des systèmes de Sobolev .
A. Sous-famille et sous-système de Sobolev 61
B. Inclusion vectorielle-topologique des systèmes de Sobolev associés à une même famille 64
C. Diagramme fonctionnel associé à une inclusion vectorielle-topologique, diagramme de base associé à un système de Sobolev 66
D. Invariance vectorielle-topologique d'un système de Sobolev 68
E. Systèmes de Sobolev intermédiaires associés à une famille D - invariante 72

II.3 : Propriétés topologiques propres aux espaces projectifs de Sobolev .

A. Familles filtrantes de semi-normes 74

B. Conservation des propriétés topologiques des E_λ 76

II.4 : Propriétés topologiques propres aux espaces inductifs de Sobolev.

A. Familles filtrantes de semi-normes..... 81

B. Conservation des propriétés topologiques des E_λ 85

Chapitre III : Etude de la dualité dans les espaces de Sobolev .

III.1 : Continuité de la transposée topologique d'une application linéaire continue 89

III.2 : Familles et systèmes de Sobolev duals.

A. Famille duale d'une famille de Sobolev D-invariante 93

B. Système de Sobolev D-normal, et système dual associé 99

III.3 : Espaces de Sobolev de type dual : $\overleftarrow{H}_*$ et $\overrightarrow{K}_*$ 102

III.4 : Etude algébrique de la dualité des espaces de Sobolev.

A. Dualité de l'espace projectif de Sobolev $\overleftarrow{H(\Lambda;E_\lambda)}$ ... 109

B. Dualité de l'espace inductif de Sobolev $\overrightarrow{K(\Lambda;E_\lambda)}$ ... 111

III.5 : Etude topologique de la dualité des espaces de Sobolev.

A. Homomorphie de la transposée topologique 116

B. Aspect topologique de la dualité des espaces de Sobolev 119

III.6 : Application des théorèmes de dualité aux espaces de Sobolev classiques, et à certains espaces de distributions.

A. Espaces de Sobolev classiques 126

B. Espaces de distributions 128

CHAPITRE I :

QUELQUES PROPRIETES DES LIMITES PROJECTIVES ET INDUCTIVES

Nous rappelons dans une première partie les définitions et premières propriétés classiques des limites projectives et inductives d'espaces vectoriels topologiques localement convexes ; dans une deuxième partie nous étudierons, plus précisément les limites projectives et inductives associées à une seule application, afin de ré - soudre les problèmes de continuité et d'homomorphie que nous rencontrerons lors de l'étude des espaces de Sobolev, ainsi que leurs liens avec la notion de supplémentaire topologique.

Remarque : Les systèmes de définition des limites projectives et inductives que nous utilisons ne sont pas transitifs ; dans la terminologie de N. Bourbaki, il s'agit des limites initiales et limites finales localement convexes ; dans celle de Schaefer, des topologies projectives et induc - tives ; celle que nous utilisons ici est celle de Grothendieck (cf. bibliographie)

-2-

CHAPITRE I. PREMIERE PARTIE :

ETUDE CLASSIQUE DES LIMITES PROJECTIVES ET INDUCTIVES.

I.1 : DEFINITION ET PROPRIETES CLASSIQUES DES LIMITES PROJECTIVES.

Tous les espaces vectoriels considérés sont toujours sur le même corps, qui peut être celui des réels ou des complexes.

Soient E un espace vectoriel, $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'e.v.t. localement convexes, et pour chaque $\lambda\in\Lambda$, une application linéaire non nulle u_λ de E dans E_λ.

Proposition 1 :

La topologie initiale sur E associée aux u_λ (i.e. la topologie la moins fine sur E rendant les u_λ continues) est compatible avec la structure vectorielle de E ; muni de cette topologie, E est un espace localement convexe, et si, pour tout $\lambda\in\Lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ est une base de voisinages V_λ convexes équilibrés de O dans E_λ, on obtient une base $\mathfrak{B}$ de voisinages V convexes équilibrés de O dans E en considérant les intersections finies des images réciproques $u_\lambda^{-1}(V_\lambda)$.

Par définition de la topologie initiale, un élément x de E admet pour base de voisinages l'ensemble $\mathfrak{B}(x)$ des intersections finies des $u_\lambda^{-1}(u_\lambda(x) + V_\lambda)$, pour V_λ appartenant à $\mathfrak{B}_\lambda$. Du fait de la linéarité des u_λ, la topologie de E sera invariante par translation, et $\mathfrak{B}(O)$ vérifie les axiomes des bases de voisinages de O convexes équilibrés : il est composé d'ensembles, convexes, équilibrés, absorbants, et vérifie la propriété d'additivité :

$$(\forall V\in\mathfrak{B})\,(\exists W\in\mathfrak{B}) \;:\; (W + W \subset V)$$

*

-3-

Definition :

on appelle " limite projective des e.l.c. E_λ , associés aux u_λ " l'espace localement convexe ainsi défini ; nous le noterons :

$$\underset{\leftarrow}{E} = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (u_\lambda ; E_\lambda)$$

Proposition 2 :

Si les E_λ sont séparés, pour que $\underset{\leftarrow}{E}$ le soit, il faut et il suffit que les noyaux des u_λ aient une intersection réduite à O.

En effet, leur intersection est réduite à O si et seulement si, pour tout élément $x \neq O$ de E, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que l'on ait $u_\lambda(x) \neq O$, ce qui, du fait de la séparation des E_λ, est équivalent, pour tout $x \neq O$, à l'existence d'un $V_{\lambda(x)} \in \mathfrak{B}_{\lambda(x)}$ tel que l'on ait $u_{\lambda(x)} \notin V_\lambda$, soit encore : $x \notin u_\lambda^{-1}(V_\lambda)$. *

EXEMPLES FONDAMENTAUX DE LIMITES PROJECTIVES.

(1) Sous-espace vectoriel topologique.

On appelle ainsi l'e.v.t. formé d'un sous-espace vectoriel F d'un e.v.t. E, et de la topologie induite sur F par celle de E. Si E est un espace localement convexe, le sous-e.v.t. F est la limite projective de E associée à l'inclusion canonique de F dans E : il suffit, pour le démontrer, de comparer les bases respectives de voisinages convexes équilibrés de O.

Propriétés essentielles: (cf. Schaefer, Grothendieck)

1° : Si E est séparé , F l'est aussi.

2° : Si E est complet , F l'est si et seulement s'il est fermé dans E.

.../...

-4-

3° : Une partie de F est bornée (a) (resp. complète, précompacte (b), compacte) si et seulement si elle est bornée (resp. complète, précompacte, compacte) de E.

En particulier, si E est quasi-complet (c), $\overleftarrow{F}$ est quasi-complet.

(2) Espace vectoriel topologique produit .

Soit $E = \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ un ensemble produit d'ensembles E_λ munis de structures d' e.v.t. Sur E, les structures d'espace vectoriel produit et d'espace topologique produit sont compatibles, et en font un e.v.t. appelé " e.v.t. - produit " .

Si les E_λ sont localement convexes, alors E est limite projective des E_λ, associée aux projections ($\pi_\lambda : E \longrightarrow E_\lambda$) .

Si les $\mathfrak{B}_\lambda$ sont des bases respectives de voisinages convexes équilibrés de O dans E_λ , alors l'ensemble $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{\lambda \in \mathfrak{M}} V_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda - \mathfrak{M}} E_\lambda \; : \; \mathfrak{M} \text{ partie finie de } \Lambda \; ; \; (\lambda \in \mathfrak{M})(V_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda) \right\}$$

est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans E.

(a) On rappelle qu'une partie A d'un e.v.t. E est bornée si elle vérifie la propriété :

$$(\forall V \in \mathfrak{B})\ (\exists \alpha > 0) : (\alpha A \subset V)$$

où $\mathfrak{B}$ est une base de voisinages de O dans E. Si E est un e.l.c. , l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'une partie bornée de E est un borné de E.

(b) Une partie A de E est précompacte si pour tout voisinage V de O dans E, il existe un ensemble fini $A_o \subset A$, tel que l'on ait $A \subset A_o + V$.

Lorsque E est séparé, il est équivalent de dire que l'espace topologique $\hat{A}$, complété de A, est compact. Il y a équivalence entre les parties précompactes, complètes et les parties compactes. Lorsque E est localement convexe, l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'une partie précompacte est précompacte.

(c) Un e.v.t. est " quasi-complet " si c'est un e.v.t. dans lequel toute partie fermée bornée est complète.

-5-

Propriétés essentielles :

1° : Si les E_λ sont séparés, $\underset{\leftarrow}{E} = \underset{\leftarrow\lambda}{\Pi} E_\lambda$ l' est aussi.

2° : $\underset{\leftarrow}{E}$ est complet si et seulement si les E_λ le sont.

3° : Une partie A de E est bornée (resp. précompacte) si et seulement si ses projections $\pi_\lambda(A)$ le sont dans l' e.l.c. E_λ respectif.

4° : Un filtre de Cauchy dans E est un filtre dont toutes les projections sont des bases de filtres de Cauchy dans l' espace E_λ respectif.

5° : Lorsque les E_λ sont séparés, une partie de E est complète (resp. compacte) si et seulement si ses projections le sont; il en résulte qu' un produit d' e.l.c. séparés et quasi-complets, est séparé et quasi-complet. *

Etudions maintenant trois propriétés essentielles des limites projectives :

Theoreme 1 : Propriété universelle des limites projectives.

Soient E un espace vectoriel, $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d' e.v.t. localement convexes, et pour chaque $\lambda\in\Lambda$, une application linéaire $u_\lambda : E \longrightarrow E_\lambda$. Alors l' e.v.t. $\underset{\leftarrow}{E}$, limite projective des E_λ associée aux u_λ, est le seul espace localement convexe défini sur E qui possède la propriété suivante :

" pour tout e.l.c. F et toute application linéaire $u : F \longrightarrow E$, la continuité de u est équivalente à celle des $u_\lambda \circ u$ pour tout $\lambda\in\Lambda$ " .

Montrons d' abord que $\underset{\leftarrow}{E}$ possède la propriété énoncée. La continuité de u entraîne celle des $u_\lambda \circ u$, puisque les u_λ sont continus; réciproquement:

$$u^{-1}\left(\bigcap_{\text{finie}} u_\lambda^{-1}(V_\lambda)\right) = \bigcap_{\text{finie}} (u_\lambda \circ u)^{-1}(V_\lambda)$$

est un voisinage de F, comme intersection finie des voisinages $(u_\lambda \circ u)^{-1}(V_\lambda)$, de par la continuité des $u_\lambda \circ u$.

-6-

Inversement, si E est muni d'une structure propre d'espace localement convexe E_o possédant la propriété énoncée, on a l'inclusion vectorielle topologique $E_o < \underleftarrow{E}$ car les u_λ sont continus de E_o dans E_λ, du fait de la continuité de l'identité de E, considérée de E_o dans lui-même ; l'inclusion opposée résultera de la continuité de cette même identité, considérée de $\underleftarrow{E}$ dans E_o, du fait de la continuité des $u_\lambda \circ Id = u_\lambda$ de $\underleftarrow{E}$ dans chaque E_λ respectif.

Theoreme 2 : Transitivité des limites projectives.

Si $\underleftarrow{E}$ est limite projective d'e.l.c. E_λ, associée à des applications linéaires u_λ, eux-mêmes limites projectives d'e.l.c. $E_{\lambda,\mu}$, associées respectivement à des applications $u_{\lambda,\mu}$, alors $\underleftarrow{E}$ est limite projective des $E_{\lambda,\mu}$, associée aux applications $u_{\lambda,\mu} \circ u_\lambda$, soit

$$\underleftarrow{E} = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} \left(u_\lambda ; \varprojlim_{\mu\in\mathfrak{M}_\lambda} (u_{\lambda,\mu} ; E_{\lambda,\mu}) \right) = \varprojlim_{\lambda,\mu} \left(u_{\lambda,\mu} \circ u_\lambda ; E_{\lambda,\mu} \right)$$

En effet, puisque $\underleftarrow{E}$ est limite projective des E_λ, pour tout e.l.c. F et toute application linéaire u de F dans E, la continuité de u est équivalente à celle des $u_\lambda \circ u$ pour tout $\lambda\in\Lambda$; or la continuité de chaque $u_\lambda \circ u$ est équivalente à celle des $u_{\lambda,\mu} \circ (u_\lambda \circ u)$ pour tout $\mu\in\mathfrak{M}_\lambda$; la propriété universelle est donc vérifiée par $\underleftarrow{E}$ relativement aux $u_{\lambda,\mu} \circ u_\lambda$, et ainsi $\underleftarrow{E}$ est limite projective des $E_{\lambda,\mu}$ relativement aux $(u_{\lambda,\mu} \circ u_\lambda)$.

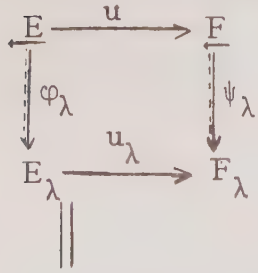
Theoreme 3 : Théorème de transfert projectif de la continuité .

On considère deux limites projectives

$$\underleftarrow{E} = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} (\varphi_\lambda ; E_\lambda) \quad \text{et} \quad \underleftarrow{F} = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} (\psi_\lambda ; F_\lambda)$$

sur le même ensemble d'indices Λ, et $u : E \longrightarrow F$ linéaire .

Si pour chaque $\lambda\in\Lambda$, $\psi_\lambda \circ u$ se factorise à gauche par φ_λ en une application linéaire continue u_λ, alors u est continue.



Autre énoncé : Si pour tout $\lambda\in\Lambda$, nous avons le diagramme commutatif linéaire ci-contre, la continuité des $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ entraîne la continuité de u, et le diagramme est alors vectoriel-topologique.

-7-

Appliquons en effet à $\underleftarrow{F}$ la propriété universelle : u est continue si et seulement si les $\psi_\lambda \circ u$ sont tous continus, ce qui résulte de la commutativité du diagramme et de la continuité des u_λ et φ_λ.

Corollaire 1 : Conservation de l'inclusion vectorielle topologique sur un même espace .

Considérons, pour tout $\lambda \in \Lambda$, une inclusion vectorielle topologique : $E_{1,\lambda} < E_{2,\lambda}$ due à deux topologies sur le même espace vectoriel E_λ , et une application linéaire $\varphi_\lambda : E \longrightarrow E_\lambda$. L'inclusion vectorielle topologique est conservée dans le passage aux espaces projectifs associés, soit :

$$\underleftarrow{E}_1 = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} (\varphi_\lambda ; E_{1,\lambda}) < \underleftarrow{E}_2 = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} (\varphi_\lambda ; E_{2,\lambda})$$

Il suffit d'appliquer le théorème 3 avec $\psi_\lambda = \varphi_\lambda$, $u_\lambda = Id_{E_\lambda}$ et $u = Id_E$.

Corollaire 2 : Inclusion des produits vectoriels topologiques .

Le passage au produit d'une famille d' e.l.c. conserve l'inclusion vectorielle topologique (et ceci sous la restriction du corollaire 1) ; si donc, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $E_\lambda \overset{(i_\lambda)}{<} F_\lambda$, alors

$$\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda} < \underleftarrow{\Pi_\lambda F_\lambda}$$

Il suffit d'appliquer le théorème 3 avec $\varphi_\lambda = \pi_{E_\lambda}$, $\psi_\lambda = \pi_{F_\lambda}$, $u_\lambda = i_\lambda$ et u l'application injective $\Pi_\lambda u_\lambda$:

$$\begin{cases} \Pi_\lambda E_\lambda \longrightarrow \Pi_\lambda F_\lambda \\ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \longrightarrow (i_\lambda(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \end{cases}$$

-8-

I.2 : DEFINITION ET PROPRIETES CLASSIQUES DES LIMITES INDUCTIVES .

Soient E un espace vectoriel, $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d' e.v.t. localement convexes, et pour chaque $\lambda\in\Lambda$, une application linéaire non nulle u_λ de E_λ dans E.

Proposition 1.bis :

Il existe sur E une plus fine topologie localement convexe rendant les u_λ continues ; est voisinage convexe équilibré de O dans E pour cette topologie, toute partie non vide de E, convexe, équilibrée , absorbante, dont pour chaque $\lambda\in\Lambda$, l'image réciproque par u_λ est un voisinage de O dans E_λ .

(1) Montrons d'abord que l'ensemble $\mathfrak{B}$ des parties non vides de E vérifiant les conditions ci-dessus est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans E. $\mathfrak{B}$ est non vide, puisqu'il contient E, et il ne contient pas l'ensemble vide par hypothèse ; l'intersection de deux parties non vides convexes, équilibrées, absorbantes est une partie non vide convexe, équilibrée, absorbante, et l'image réciproque par u_λ de cette intersection n'est autre que l'intersection des images réciproques respectives, et donc un voisinage de O dans E_λ ; enfin, la relation d'additivité est vérifiée, car si $V\in\mathfrak{B}$, on a $\frac{1}{2}V\in\mathfrak{B}$ du fait de la linéarité des u_λ, et $\frac{1}{2}V+\frac{1}{2}V=V$ puisque V est convexe.

(2) La topologie ainsi définie est la plus fine topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, car tout voisinage convexe équilibré de O dans E pour une topologie localement convexe compatible appartient nécessairement à $\mathfrak{B}$. *

Definition :

On appelle " limite inductive des e.l.c. E_λ, associée aux u_λ " l' e.v.t. localement convexe ainsi défini, que l'on notera :

$$E = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} (u_\lambda ; E_\lambda)$$

-9-

Remarque sur la séparation de $\underrightarrow{E}$:

Contrairement au cas des limites projectives, même si les E_λ sont tous séparés, $\underrightarrow{E}$ peut ne pas l'être (cf. Grothendieck IV.1.4.ex.2). Toutefois, les limites inductives que nous rencontrerons dans la deuxième partie sont toutes séparées lorsque les E_λ le sont, car il existera une topologie séparée sur E moins fine que la topologie limite inductive.

EXEMPLES FONDAMENTAUX DE LIMITES INDUCTIVES.

(1) Espace vectoriel topologique -quotient.

Soient E un e.v.t. et F un sous-espace vectoriel de E. Les structures d'espace topologique -quotient et d'espace vectoriel -quotient sont compatibles; si $\mathfrak{B}$ est une base de voisinages de O dans E, et si p est l'application-quotient canonique, $p(\mathfrak{B})$ est une base de voisinages de O dans l'e.v.t.-quotient E/F.

Si E est localement convexe, alors E/F l'est aussi; c'est même dans ce cas la limite inductive de E associée à p.

Il suffit de montrer pour cela que $p(\mathfrak{B})$ est une base de voisinages de O pour $\underrightarrow{E/F}$; or si W est voisinage de O pour la limite inductive, $p^{-1}(W)$ contient un élément V de $\mathfrak{B}$, et donc nous avons les inclusions: $p(V) \subset p(p^{-1}(W)) \subset W$;
d'où le résultat cherché.

Propriétés essentielles:

1° : Si E est séparé, $\underrightarrow{E/F}$ l'est si et seulement si F est fermé dans E.

En effet, si $\underrightarrow{E/F}$ est séparé, $\{\overline{O}\}$ est fermé dans $\underrightarrow{E/F}$, et la continuité de p entraîne que $F = p^{-1}(\{\overline{O}\})$ est fermé dans E ; inversement, si F est fermé dans E, $V = E-F$ est un voisinage ouvert de $x \notin F$, et $p(V)$ un voisinage de $\overline{x} = p(x)$ ne contenant pas $\overline{O}$. *

2° : L'image par l'application-quotient d'une partie bornée (resp. précompacte, compacte) est bornée (resp. précompacte, compacte).

Malheureusement, il n'en est pas de même pour l'image d'une partie complète : ainsi E peut être complet sans que (E/F) le soit, même si F est fermé ; et un filtre de Cauchy de (E/F) ne provient donc pas nécessairement d'un filtre de Cauchy de E . (cf. Schaefer)

D'autre part, on ne sait pas si une partie bornée (resp . précompacte) de E/F provient ou non d'une partie bornée (resp.précompacte) de E . D'où bien des imprécisions pour les limites inductives, sauf dans le cas particulier où F admet un supplémentaire topologique (cf.parag. 5) (cf. aussi Grothendieck)

(2) Somme directe topologique .

Si E est un espace vectoriel somme directe de sous-espaces E_λ, il est algébriquement isomorphe au sous-espace vectoriel de $\Pi_\lambda E_\lambda$ composé des suites presque nulles $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (i.e. dont l'ensemble des x_λ non nuls est fini). On considérera donc désormais que la somme directe d'une famille d'espaces vectoriels $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est ce sous-espace vectoriel de l'espace-produit, qu'on notera encore $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$; nous noterons de même ses éléments $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$.

Soient $(j_\lambda : E_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda)$ les injections canoniques de E_λ dans la somme directe qui à un élément x de E_λ font correspondre $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \delta_{\lambda\mu} x$ (où $\delta_{\lambda\mu}$ est le symbole de Kronecker) i.e. l'élément de la somme directe dont toutes les projections sur les E_μ son t nulles, sauf sa projection sur E_λ qui est égale à x .

-11-

Definition :

Lorsque les E_λ sont des espaces localement convexes, on appellera " somme directe topologique des E_λ " l'espace localement convexe limite inductive des E_λ associée aux j_λ . On le notera :

$$\oplus_\lambda E_\lambda \xrightarrow{} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (j_\lambda ; E_\lambda)$$

pour le distinguer du sous- e.v.t. , également localement convexe, $\oplus_\lambda E_\lambda \xleftarrow{}$ de $\Pi_\lambda E_\lambda \xleftarrow{}$

$$\oplus_\lambda E_\lambda \xleftarrow{} = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (\pi'_\lambda ; E_\lambda)$$

où les π'_λ sont les restrictions à la somme directe des projections π_λ du produit sur les E_λ .

Afin de mettre en évidence une base pratique de voisinages de O dans la somme directe topologique, rappelons que l' " enveloppe convexe équilibrée " $\Gamma(A)$ d'une partie A d'un espace vectoriel E, est l'intersection de toutes les parties convexes équilibrées de E contenant A, soit encore l'ensemble des éléments de la forme :

$$(x = \alpha y + \beta z) \quad \text{avec } (y, z \in A)\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \text{ et } (|\alpha| + |\beta| \leq 1)$$

Si A est lui-même réunion d'une famille $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de parties de E, et si $\mathbb{R}^{(\Lambda)}$ désigne l'ensemble des familles presque nulles de réels, indexées par Λ, $\Gamma(A) = \Gamma(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$ est l'ensemble des éléments de la forme :

$$(x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda x_\lambda) \text{ avec } (\forall \lambda \in \Lambda)(x_\lambda \in A_\lambda),\ ((\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbb{R}^{(\Lambda)}) \text{ et } (\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda| \leq 1)$$

Lorsque les A_λ sont équilibrés, $\Gamma(A)$ est de façon équivalente l'ensemble des éléments de la forme :

$$(x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda x_\lambda) \text{ avec } (\forall \lambda \in \Lambda)\ (x_\lambda \in A_\lambda), ((\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in [0,1]^{(\Lambda)}) \text{ et } (\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \leq 1)$$

-12-

Base de voisinages :

Si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans E_λ, l'ensemble $\mathfrak{B}$ des enveloppes convexes équilibrées des réunions des familles $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{B}_\lambda$, est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans la somme directe topologique $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$.

Un élément $\Gamma(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda(V_\lambda))$ de $\mathfrak{B}$ est l'ensemble

$$\{ \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda x_\lambda : (\forall\lambda\in\Lambda)(x_\lambda \in V_\lambda) \text{ et } (\oplus_\lambda \alpha_\lambda \in \mathbb{R}^{(\Lambda)}) \text{ et } (\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha_\lambda| \leq 1)\}$$

On vérifie tout d'abord que $\mathfrak{B}$ est une base de voisinages de O pour une topologie localement convexe sur $\oplus_\lambda E_\lambda$ i.e. que $\mathfrak{B}$ est une base de filtre vérifiant la propriété d'additivité, et dont les éléments sont convexes, équilibrés et absorbants. Comme l'image réciproque par j_λ d'un élément $\Gamma(\cup_\lambda j_\lambda(V_\lambda))$ de $\mathfrak{B}$ n'est autre que V_λ, les j_λ sont continues par cette topologie, et il reste seulement à vérifier que tout voisinage convexe équilibré de O dans $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$ contient un élément de $\mathfrak{B}$. Si donc V est une partie convexe équilibrée absorbante de $\oplus_\lambda E_\lambda$ telle que ses images réciproques $j_\lambda^{-1}(V) = V_\lambda$ soient des voisinages de O dans les E_λ, il existe des $W_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$ inclus respectivement dans V_λ, et V contient donc tous les $j_\lambda(W_\lambda)$; il contient donc leur réunion, et même l'enveloppe convexe équilibrée de celle-ci, puisqu'il est lui-même convexe et équilibré.

Propriétés essentielles :

1° : Si Λ est fini, la somme directe topologique $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$ est isomorphe au produit vectoriel topologique $\underleftarrow{\prod_\lambda E_\lambda}$.
En effet, si pour chaque $\lambda\in\Lambda$, V_λ est un voisinage convexe équilibré de O dans E_λ, on a la double inclusion suivante :

$$\frac{1}{\text{card } \Lambda} \prod_\lambda V_\lambda \subset \Gamma(\cup_\lambda j_\lambda(V_\lambda)) \subset \prod_\lambda V_\lambda .$$

2° : Si les E_λ sont séparés, leur somme directe topologique l'est aussi.
Sa topologie est en effet plus fine que celle du sous - e.v.t. $\underleftarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$ induit par $\underleftarrow{\prod_\lambda E_\lambda}$ qui est séparé .

.../...

-13-

3° : La somme directe topologique est complète si et seulement si les E_λ le sont .

La démonstration est délicate (cf. Schaefer)

4° : Une partie A de $\oplus_\lambda E_\lambda$ est bornée si et seulement s'il existe une partie finie $\mathfrak{M}$ de Λ telle que A soit contenue dans $\prod_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_\lambda$ et bornée dans ce produit vectoriel topologique **fini**, ou de façon équivalente, son image par π_λ est bornée dans E_λ pour tout $\lambda\in\mathfrak{M}$, et nulle pour tout $\lambda \in \Lambda - \mathfrak{M}$. (a)

5° : Il en résulte que toute somme directe topologique d'une famille d' e.l.c. quasi-complets est quasi-complète .

(3) Coeur convexe d'un espace vectoriel E.

Puisque tout espace vectoriel E admet une base algébrique $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, il est algébriquement isomorphe à $\mathbb{R}^{(\Lambda)}$ (resp. $\mathbb{C}^{(\Lambda)}$).

On appelle " coeur convexe de E " la somme directe topologique $E_{\rightarrow\!>} = \oplus_\lambda \mathbb{R}\, e_\lambda$ (resp. $\oplus_\lambda \mathbb{C}\, e_\lambda$). Comme les injections $j_\lambda : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to E\\ \alpha\to\alpha e_\lambda\end{array}\right.$ sont continues pour toute topologie de E compatible avec sa structure d'espace vectoriel, la topologie de E est la plus fine topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de E.

$E_{\rightarrow\!>}$ admet pour base de voisinages de O l'ensemble de toutes les parties convexes, équilibrées et absorbantes ; il est séparé et complet.

Toute forme linéaire sur $E_{\rightarrow\!>}$ est continue ; plus généralement, toute application linéaire de $E_{\rightarrow\!>}$ dans un espace localement convexe F est continue (moyennant la propriété universelle des limites inductives, démontrée au théorème 1 bis ci-dessous).

(a) La démonstration donnée par Schaefer fait appel à une propriété caractéristique des parties bornées d'un e.v.t., particulièrement utile dans les démonstrations par l'absurde :

> "Une partie A d'un e.v.t. E est bornée si et seulement si, pour toute suite $\{\alpha_n\}$ de réels convergeant vers O, et toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de A, la suite $\{\alpha_n x_n\}$ converge vers O dans E " .

-14-

Vérifions maintenant les trois propriétés essentielles des limites inductives, analogues à celles que nous avions rencontrées pour les limites projectives :

Theoreme 1 bis : Propriété universelle des limites inductives.

Soient E un espace vectoriel, $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'e.v.t. localement convexes, et pour chaque $\lambda \in \Lambda$, une application linéaire $u_\lambda : E_\lambda \longrightarrow E$.
L'e.v.t. limite inductive $\underset{\rightarrow}{E}$ des E_λ, associée aux u_λ, est le seul espace localement convexe qui possède la propriété suivante :

" pour tout e.l.c. F et toute application linéaire $u : E \longrightarrow F$, la continuité de u est équivalente à celle des $u \circ u_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ ".

Montrons d'abord que $\underset{\rightarrow}{E}$ possède la propriété énoncée. La continuité de u entraîne celle des $u \circ u_\lambda$, puisque les u_λ sont continus ; réciproquement, pour tout voisinage V convexe équilibré de O dans F, $u^{-1}(V)$ est un convexe équilibré absorbant de E du fait de la linéarité de u, et ses images réciproques par les u_λ sont des voisinages de O dans l'espace E_λ respectif, du fait de la continuité des $u \circ u_\lambda$: c'est donc un voisinage de O dans $\underset{\rightarrow}{E}$ d'après la proposition 1 bis .

Inversement, si E est muni d'une structure propre d'espace localement convexe E_o possédant la propriété énoncée, on a l'inclusion vectorielle topologique $\underset{\rightarrow}{E} < E_o$ car les u_λ sont continues de E_λ dans E_o, du fait de la continuité de l'identité de E, considérée de E_o dans lui-même ; l'inclusion opposée résultera de la continuité de cette même identité, considérée de E_o dans $\underset{\rightarrow}{E}$, du fait de la continuité des $Id \circ u_\lambda = u_\lambda$ de chaque E_λ dans $\underset{\rightarrow}{E}$.

Theoreme 2 bis : Transitivité des limites inductives .

Si $\underset{\rightarrow}{E}$ est limite inductive d'e.l.c. E_λ, associée à des applications linéaires u_λ, eux-mêmes limites inductives d'e.l.c. $E_{\lambda,\mu}$, associées respectivement à des applications $u_{\lambda,\mu}$; alors $\underset{\rightarrow}{E}$ est limite inductive des $E_{\lambda,\mu}$, associée aux applications $u_\lambda \circ u_{\lambda,\mu}$, soit :

$$\underset{\rightarrow}{E} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (u_\lambda \; ; \; \varinjlim_{\mu \in \mathfrak{M}_\lambda} (u_{\lambda,\mu} \; ; \; E_{\lambda,\mu})) = \varinjlim_{\lambda,\mu} (u_\lambda \circ u_{\lambda,\mu} ; E_{\lambda,\mu})$$

-15-

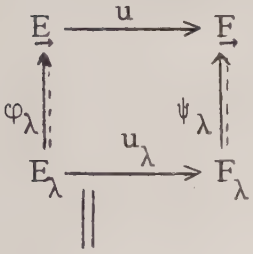
En effet, puisque $\underrightarrow{E}$ est limite inductive des E_λ, pour tout e.l.c. F et toute application linéaire u de F dans E, la continuité de u est équivalente à celle des $u \circ u_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$; or la continuité de chaque $u \circ u_\lambda$ est équivalente à celle des $(u \circ u_\lambda) \circ u_{\lambda,\mu}$ pour tout $\mu \in \mathfrak{M}_\lambda$; la propriété universelle est donc vérifiée par $\underrightarrow{E}$ relativement aux $u_\lambda \circ u_{\lambda,\mu}$, et ainsi $\underrightarrow{E}$ est limite inductive des $E_{\lambda,\mu}$ relativement aux $u_\lambda \circ u_{\lambda,\mu}$.

Theoreme 3 bis : Théorème de transfert inductif de la continuité .

On considère deux limites inductives

$$\underrightarrow{E} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda ; E_\lambda) \quad \text{et} \quad \underrightarrow{F} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda ; F_\lambda)$$

sur le même ensemble d'indices Λ ,et $u : E \longrightarrow F$ linéaire.
Si pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $u \circ \varphi_\lambda$ se factorise à droite par ψ_λ en une application linéaire continue u_λ, alors u est continue .



Autre énoncé : Si pour tout $\lambda \in \Lambda$, nous avons le diagramme commutatif linéaire ci-contre, la continuité des $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ entraîne la continuité de u, et le diagramme est vectoriel-topologique.

Appliquons en effet à $\underrightarrow{E}$ la propriété universelle : u est continue si et seulement si les $(u \circ \varphi_\lambda)$ sont toutes continues, ce qui résulte de la commutativité du diagramme, et de la continuité des u_λ et ψ_λ .

Corollaire 1 : Conservation de l'inclusion vectorielle topologique sur un même espace .

Considérons, pour tout $\lambda \in \Lambda$, une inclusion vectorielle topologique $E_{1,\lambda} < E_{2,\lambda}$ due à deux topologies sur le même espace vectoriel E_λ, et une application linéaire $\varphi_\lambda : E_\lambda \longrightarrow E$. L'inclusion vectorielle topologique est conservée dans le passage aux espaces inductifs associés, soit :

$$1\underrightarrow{E} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda ; E_{1,\lambda}) < 2\underrightarrow{E} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda ; E_{2,\lambda})$$

Il suffit d'appliquer le théorème 3 bis avec $\psi_\lambda = \varphi_\lambda$, $u_\lambda = Id_{E_\lambda}$ et $u = Id_E$.

-16-

Corollaire 2 : Inclusion des sommes directes topologiques .

Le passage à la somme directe d'une famille d' e.l.c. conserve l'inclusion vectorielle topologique (et ceci sous la restriction du corollaire 1) ; si donc, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $E_\lambda \underset{(i_\lambda)}{<} F_\lambda$, alors

$$\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda} < \underrightarrow{\oplus_\lambda F_\lambda}$$

C'est une application du théorème 3 bis avec $\varphi_\lambda = j_{E_\lambda}$, $\psi_\lambda = j_{F_\lambda}$, $u_\lambda = i_\lambda$, et u l'application injective $\oplus_\lambda u_\lambda$:

$$\left| \begin{array}{l} \oplus_\lambda E_\lambda \longrightarrow \oplus_\lambda F_\lambda \\ \oplus_\lambda x_\lambda \longrightarrow \oplus_\lambda i_\lambda(x_\lambda) \end{array} \right.$$

CHAPITRE I. DEUXIEME PARTIE .

ETUDE DES LIMITES PROJECTIVES ET INDUCTIVES ASSOCIEES A UNE SEULE APPLICATION .

I.3 : PROBLEMES DE CONTINUITE .

Compte-tenu des similitudes existant souvent entre les limites projectives et inductives, nous mènerons désormais de front leur étude. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux limites projectives et inductives associées à une seule application linéaire ; ceci ne restreint pas le champ de notre étude, en raison du théorème suivant, qui sera complété ultérieurement (th.8. corol. 2) :

Theoreme 4 : APPLICATION ASSOCIEE A UNE LIMITE PROJECTIVE OU INDUCTIVE .

Toute limite projective $\underleftarrow{E} = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} (u_\lambda ; E_\lambda)$ est limite projective de l'espace projectif produit : $\prod_\lambda E_\lambda$, associée à une seule application u :

$$u : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \prod_\lambda E_\lambda \\ x \longrightarrow (u_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} \end{array} \right.$$

Si, pour tout $\lambda\in\Lambda$, les π_λ sont les projections canoniques associées à l'espace - produit, u vérifie donc les égalités :

$$(\forall\lambda\in\Lambda) \quad (\pi_\lambda \circ u = u_\lambda)$$

De même, toute limite inductive $\underrightarrow{F} = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} (v_\lambda ; F_\lambda)$ est limite inductive de l'espace inductif somme directe $\bigoplus_\lambda F_\lambda$, associée à une seule application v :

$$v : \left| \begin{array}{l} \bigoplus_\lambda F_\lambda \longrightarrow F \\ \bigoplus_\lambda x_\lambda \longrightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda(x_\lambda) \end{array} \right.$$

Si, pour tout $\lambda\in\Lambda$, les j_λ sont les injections canoniques associées à la somme directe, v vérifie les égalités

$$(\forall\lambda\in\Lambda) \quad (v \circ j_\lambda = v_\lambda)$$

-18-

Le théorème 4 résulte immédiatement de la transitivité des limites projectives et inductives :

$$\varprojlim (u; \prod_\lambda E_\lambda) = \varprojlim (u ; \varprojlim_\lambda (\pi_\lambda ; E_\lambda)) = \varprojlim (\pi_\lambda \circ u ; E_\lambda) = \underset{\leftarrow}{E}$$

et

$$\varinjlim (v ; \oplus_\lambda F_\lambda) = \varinjlim (v ; \varinjlim_\lambda (j_\lambda ; F_\lambda)) = \varinjlim (v \circ j_\lambda ; F_\lambda) = \underset{\rightarrow}{F}$$

*

Avant de démontrer le prochain théorème, qui est fondamental et sera constamment utilisé par la suite, il nous est nécessaire de mettre en évidence certaines bases de voisinages convexes équilibrés de O :

Si $\underset{\leftarrow}{E}$ est limite projective d'un e.l.c. F , associée à une application u, et si $\mathfrak{B}'$ est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans F, il résulte de la proposition 1 que $u^{-1}(\mathfrak{B}') = \{u^{-1}(V') : V' \in \mathfrak{B}'\}$ est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans $\underset{\leftarrow}{E}$.

Si $\underset{\rightarrow}{E}$ est limite inductive d'un e.l.c. E , associée à une application u, nous obtiendrons une base intéressante de $\underset{\rightarrow}{E}$ grâce à la proposition suivante :

Proposition 3 : Caractérisation d'une limite inductive à l'aide d'un supplémentaire .

Toute limite inductive $\underset{\rightarrow}{E} = \varinjlim (u ; E)$ est somme directe topologique de $\underset{\rightarrow}{u(E)} = \varinjlim (\tilde{u} ; E)$ (où $\tilde{u}$ est l'application u, considérée comme application à valeurs dans u(E)) et du coeur convexe d'un supplémentaire algébrique G de u(E) dans F, soit :

$$\underset{\rightarrow}{E} \simeq \underset{\rightarrow}{u(E)} \oplus \underset{\rightarrow}{G}$$

Si i et j désignent les injections canoniques respectives de u(E) et G dans F, alors $\underset{\rightarrow}{E}$ est limite inductive de $\underset{\rightarrow}{u(E)}$ associée à i,

-19-

puisque $\underrightarrow{F} = \varinjlim (i \circ \tilde{u} ; E) = \varinjlim (i, \varinjlim (\tilde{u} ; E)) = \varinjlim (i, \underrightarrow{u(E)})$, et la proposition revient à montrer que $\underrightarrow{F}$ est limite inductive de $\underrightarrow{u(E)}$ et de $\underrightarrow{G}$, associée aux injections canoniques i et j (ceci dans l'identification algébrique de F et de $u(E) \times G$). Or j est continue de $\underrightarrow{G}$ dans E quelle que soit la structure d'espace localement convexe dont on munisse E, par définition du coeur convexe d'un espace vectoriel (cf. I.2. exemple 3), d'où le résultat cherché .

Corollaire 1 :

Si $\mathfrak{B}$ est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans E, et $\mathfrak{B}'$ une base de voisinages convexes équilibrés de O dans $\underrightarrow{G}$ (par exemple l'ensemble de toutes les parties non vides, convexes, équilibrées, absorbantes de G), alors la famille $\mathfrak{B}''$ des enveloppes convexes équilibrées $\Gamma(u(V) \cup V')$ pour $V \in \mathfrak{B}$ et $V' \in \mathfrak{B}'$, est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans $\underrightarrow{F}$; nous avons de plus les relations d'induction suivante :

$$(\forall V \in \mathfrak{B})(\forall V' \in \mathfrak{B}') \quad \begin{cases} \Gamma(u(V) \cup V') \cap u(E) = u(V) \\ \Gamma(u(V) \cup V') \cap G = V' \end{cases}$$

Compte-tenu du théorème, il suffit de montrer que $u(\mathfrak{B})$ est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans $\underrightarrow{u(E)}$, pour vérifier la première partie du corollaire . Il résulte de la linéarité de u que $u(\mathfrak{B})$ est une base de filtre vérifiant la relation d'additivité, et composée de parties convexes équilibrées, et absorbantes dans $u(E)$; comme pour tout $V \in \mathfrak{B}$, $u^{-1}(u(V))$ contient V, tous les éléments de $u(\mathfrak{B})$ sont des voisinages de O pour la topologie inductive ; inversement tout voisinage W convexe équilibré de O pour $\underrightarrow{F}$ contient un élément de $u(\mathfrak{B})$, puisque le voisinage $u^{-1}(W)$ contient $V \in \mathfrak{B}$, d'où les inclusions :

$$u(V) \subset u(u^{-1}(W)) \subset W \quad .$$

Les relations d'induction résultent de ce que $u(E)$ et G sont algébriquement supplémentaires : dans les deux cas, l'inclusion est triviale dans un sens ; inversement tout élément $x \in \Gamma(u(V) \cup V')$ s'écrit:

$$x = \lambda u(y) + (1-\lambda)y' \quad , \quad \text{avec } y \in V, \ y' \in V', \ 0 \leq \lambda \leq 1 \quad ;$$

-20-

si de plus x appartient à u(E) (resp.G), de par l'unicité de la décomposition de F suivant u(E) et G, on aura $(1 - \lambda)y' = 0$ (resp. $\lambda u(y) = 0$) et x appartiendra à u(V) (resp. V') qui est équilibré .

Definition :

On dit que deux supplémentaires algébriques M et N d'un e.v.t. E localement convexe sont "supplémentaires topologiques " si E est somme directe topologique des sous- e.v.t. $\underset{\sim}{M}$ et $\underset{\sim}{N}$, ou, ce qui est équivalent, isomorphe à l' e.v.t.- produit de $\underset{\sim}{M}$ et de $\underset{\sim}{N}$.

Corollaire 2 :

Les sous-e.v.t. $\underset{\leftarrow}{u(E)}$ et $\underset{\sim}{G}$ de $\underset{\rightarrow}{F}$ ne sont autres que $\underset{\rightarrow}{u(E)}$ et $\underset{\rightarrow>}{G}$ qui sont ainsi supplémentaires topologiques dans $\underset{\rightarrow}{F}$; u(E) est fermé dans $\underset{\rightarrow}{F}$; enfin, $\underset{\rightarrow}{F}$ est séparé (resp. complet) si et seulement si $\underset{\rightarrow}{u(E)}$ l'est .

Le premier point est une conséquence immédiate du corollaire 1 : u(E) est fermé comme noyau de la projection continue de $\underset{\rightarrow}{F}$ sur $\underset{\rightarrow>}{G}$ qui est séparé ; enfin, puisque $\underset{\rightarrow>}{G}$ est séparé et complet, le dernier point résulte de la propriété de séparation (resp. complétion) des sommes directes topologiques . *

En combinant le corollaire 1 et le théorème 4, on obtient la proposition annexe suivante (généralisant la proposition classique ana - logue au cas où F n'est pas engendré par la réunion des $v_\lambda(F_\lambda)$:

Proposition 4 : Base d'une limite inductive .

Soient $\underset{\rightarrow}{F} = \varinjlim (u_\lambda ; F_\lambda)$, $\mathfrak{B}_\lambda$ des bases de voisinages convexes équilibrés de O dans chaque F_λ, et $\mathfrak{B}'$ une base de voisinages convexes équilibrés de O du coeur convexe d'un supplémentaire algébrique G du sous-espace vectoriel de F : $v(\oplus_\lambda F_\lambda) = \Sigma u_\lambda(F_\lambda)$ engendré par la réunion des $u_\lambda(F_\lambda)$. Alors la famille des enveloppes convexes équili - brées des réunions des familles $(W_\lambda)_{\lambda \in \Lambda \cup \{0\}} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda(\mathfrak{B}_\lambda) \times \mathfrak{B}'$ est une base de voisinages convexes équilibrés de O pour la limite inductive $\underset{\rightarrow}{F}$.

-21-

Un élément $\Gamma((\cup_\lambda (V_\lambda)) \cup V')$ de cette base est donc l'ensemble :

$$\{\alpha x' + \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda u_\lambda(x_\lambda) : (\forall\lambda\in\Lambda)(x_\lambda\in V_\lambda) \text{ et } (x'\in V') \text{ et } (\oplus_\lambda \alpha_\lambda \in \mathbb{R}^{(\Lambda)} \text{ et } (\alpha\in\mathbb{R}) \text{ et } (\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha_\lambda| + |\alpha| \le 1)\}.$$

Il suffit de comparer les éléments de cet ensemble avec ceux de l'ensemble $\Gamma(u(\Gamma_\lambda j_\lambda(V_\lambda)) \cup V')$ qui appartient à la base de $\underset{\rightarrow}{E}$, pour montrer que ces deux ensembles sont identiques.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant, que nous utiliserons constamment par la suite :

Theoreme 5 : " THEOREME DE RETOUR ".

Soient E,F deux espaces vectoriels, et une application linéaire $u : E \longrightarrow F$.

(1) Si u est injective, et E muni d'une structure d' e.v.t. localement convexe, E est limite projective associée à u de l'e.l.c. sur F limite inductive de E associée à u, soit :

$$E = \varprojlim (u ; \varinjlim (u ; E))$$

(2) Si u est surjective, et F muni d'une structure d' e.l.c. , F est limite inductive associée à u de l' e.l.c. sur E limite projective de F associée à u, soit :

$$F = \varinjlim (u ; \varprojlim (u ; F))$$

(1) Soient G un supplémentaire algébrique de u(E), et $\mathfrak{B}'$ (resp.$\mathfrak{B}$) une base de voisinages convexes équilibrés de O du coeur convexe de G (resp. base de E) (coeur convexe : cf. I.2 exemple 3)

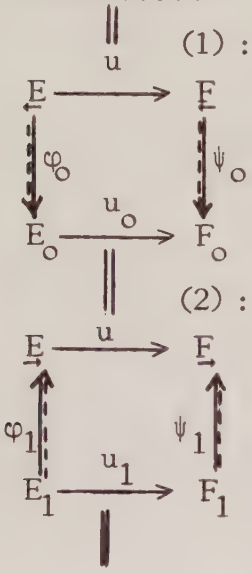
D'après le corollaire 1 de la proposition 3, les $\Gamma(u(V) \cup V')$ pour $V\in\mathfrak{B}$ et $V'\in\mathfrak{B}'$ forment une base $\mathfrak{B}''$ de $\underset{\rightarrow}{E} = \varinjlim (u ; E)$, et donc les $u^{-1}(\Gamma(u(V) \cup V'))$ forment une base de $\varprojlim (u ; \underset{\rightarrow}{E})$ or $u^{-1}(\Gamma(u(V) \cup V')) = u^{-1}(\Gamma(u(V) \cup V') \cap u(E) = u^{-1}(u(V)) = V$ puisque u est injective ; d'où le résultat cherché.

(2) Si $\mathfrak{B}_1$ est une base de F, comme $u^{-1}(\mathfrak{B}_1)$ est une base de $\underset{\leftarrow}{E} = \varprojlim (u ; F)$, et que u est surjective, $u(u^{-1}(\mathfrak{B}_1)) = \mathfrak{B}_1$ est une base pour $\varinjlim (u ; \underset{\leftarrow}{E})$. *

-22-

Ce théorème va nous permettre en particulier de démontrer une réciproque partielle des théorèmes de transfert de la continuité (cf. I.1 th.3 et I.2 th. 3 bis) :

Theoreme 6 : Théorème de transfert inverse de la continuité.



(1) : Limites projectives : On considère deux limites projectives $\underset{\leftarrow}{E} = \varprojlim (\varphi_o ; E_o)$ et $\underset{\leftarrow}{F} = \varprojlim (\psi_o ; F_o)$ associées toutes deux à une seule application, et liées par le diagramme commutatif linéaire ci-contre ; alors, si φ_o est surjective, la continuité de u est équivalente à celle de u_o.

(2) : Limites inductives : Soient de même les deux limites inductives $\underset{\rightarrow}{E} = \varinjlim (\varphi_1 ; E_1)$ et $\underset{\rightarrow}{F} = \varinjlim (\psi_1 ; F_1)$ associées toutes deux à une seule application, et liées par le diagramme commutatif linéaire ci-contre ; alors, si ψ_1 est injective, la continuité de u est équivalente à celle de u_1 .

(1) d'après le théorème 3, la continuité de u_o entraîne celle de u. Inversement, la continuité de u entraîne celle de $u_o \circ \varphi_o = \psi_o \circ u$. Si donc φ_o est surjective, $E_o = \varinjlim (\varphi_o ; \underset{\rightarrow}{E})$ d'après le théorème de retour, et la propriété universelle des limites inductives (cf.I.2 th.1 bis) entraîne la continuité de u_o .

(2) de même, d'après le théorème 3 bis, u est continue si u_1 l'est. Inversement, la continuité de u entraîne celle de $\psi_1 \circ u_1 = u \circ \varphi_1$, et le fait que ψ_1 soit injective, associé au théorème de retour, entraîne l'égalité topologique $F_1 = \varprojlim (\psi_1, \underset{\rightarrow}{F})$ et la continuité de u_1 (cf.I.1. th.1).

Remarque sur les théorèmes 5 et 6 :

Ces théorèmes se généralisent facilement aux topologies initiales et finales d'espaces topologiques généraux, ce qui entraîne qu'un certain nombre de leurs conséquences pourraient être généralisées de la même façon, moyennant les modifications terminologiques qui s'imposent. Leur démonstration est d'ailleurs beaucoup plus facile, car les difficultés rencontrées tenaient surtout à la condition d'absorption dans les e.v.t.

La présentation que nous avons adoptée est celle qui sera directement utilisable dans la construction de l'axiomatique des espaces de Sobolev.

-23-

I.4 : PROBLEMES D'HOMOMORPHIE .

Definition :

On dit que deux e.v.t. E et F sont " isomorphes en tant qu'e.v.t. s'ils sont à la fois algébriquement isomorphes et homéomorphes, i.e. s'il existe une bijection linéaire $u : E \longrightarrow F$ qui est continue ainsi que son inverse . u est alors appelée " isomorphisme vectoriel topologique " .

Theoreme 7 : Caractérisation des isomorphismes vectoriels topologiques .

Soient E,F deux e.v.t. localement convexes, algébriquement isomorphes par la bijection linéaire $u : E \longrightarrow F$. Alors u est un isomorphisme vectoriel topologique si et seulement si E coïncide avec la limite projective de F associée à u, ou si F coïncide avec la limite inductive de E associée à u, soit donc l'une quelconque des deux égalités vectorielles topologiques :

$$E = \underset{\leftarrow}{E} = \varprojlim (u ; F) \quad \text{ou} \quad F = \underset{\rightarrow}{F} = \varinjlim (u ; E)$$

- Si u est un isomorphisme, sa continuité est équivalente à l'inclusion $E < \underset{\leftarrow}{E}$, et celle de u^{-1} à l'inclusion $F < \varprojlim (u^{-1} ; E)$; du fait de la conservation de l'inclusion vectorielle topologique par passage à la limite projective (th.3 corol.1), on aura :

$$\underset{\leftarrow}{E} = \varprojlim (u ; F) < \varprojlim (u ; \varprojlim (u^{-1} ; E)) = \varprojlim (u^{-1} \circ u ; E) = E.$$

- Si $E = \underset{\leftarrow}{E}$, puisque u est surjective, on a d'après le théorème de retour (th.5) :

$$F = \varinjlim (u ; \underset{\leftarrow}{E}) = \varinjlim (u ; E) = \underset{\rightarrow}{F}$$

- Si $F = \underset{\rightarrow}{F}$, u est évidemment continue ; si de plus $\mathfrak{B}$ est une base de voisinages convexes équilibrés de O dans E, alors $(u^{-1})^{-1}(\mathfrak{B}) = u(\mathfrak{B})$ est une base de $\underset{\rightarrow}{F} = F$, et donc u^{-1} est continue . *

-24-

Conséquence immédiate :

Dans un isomorphisme vectoriel topologique, les bases de voisinages convexes équilibrés de O dans E et F, se correspondent exactement .

Definition :

Soient E,F deux e.v.t. localement convexes, et une application $u : E \longrightarrow F$ linéaire . Considérons la décomposition canonique de u :

$$E \xrightarrow{p} (E/_{\ker u}) \xrightarrow{\bar{u}} u(E) \xrightarrow{i} F$$

On dit que u est un " homomorphisme vectoriel topologique " si la bijection linéaire $\bar{u}$ est un isomorphisme vectoriel topologique de l'espace-quotient

$$(E/_{\ker u}) = \varinjlim (p ; E) \text{ dans le sous-e.v.t. } \underleftarrow{u(E)} = \underleftarrow{\lim}(i ; F)$$

Compte-tenu de la caractérisation des isomorphismes (th. précédent) et de la transitivité des limites projectives et inductives (th.2 et 2 bis), on obtient le théorème suivant :

Theoreme 8 : CARACTERISATION DES HOMOMORPHISMES VECTORIELS TOPOLOGIQUES .

Avec les hypothèses et notations de la définition, u est un homomorphisme vectoriel topologique si l'espace-quotient $(E/_{\ker u})$ est limite projective de F, ou si le sous-e.v.t. $\underleftarrow{u(E)}$ est limite inductive de E, soit l'une des deux égalités :

$$(E/_{\ker u}) = \underleftarrow{\lim} (i \circ \bar{u} ; F) \qquad \underleftarrow{u(E)} = \varinjlim (\bar{u} \circ p ; E)$$

Nous utiliserons souvent le cas particulier suivant :

-25-

* **Corollaire 1** :

Soient E,F deux e.v.t. localement convexes, et une application $u : E \longrightarrow F$, linéaire . Lorsque u est injective, c'est un homomorphisme vectoriel topologique si et seulement si E est limite projective de F (soit : $E = \varprojlim E$) ; lorsque u est surjective , c'en est un si et seulement si F est limite inductive de E (soit : $F = \varinjlim E$) .

Dans le cas injectif, $\ker u = \{0\}$, et $p = Id_E$, donc $i \circ \bar{u} = u$;
dans le cas surjectif, $u(E) = F$, et $i = Id_F$, donc $\bar{u} \circ p = u$.

*

Une conséquence importante de la caractérisation des homomorphismes est le résultat suivant, améliorant le théorème 4, et permettant de retrouver un résultat classique :

* **Corollaire 2** : Homomorphismes associés à des limites projectives et inductives .

Les applications associées à des limites projectives et inductives, mises en évidence au théorème 4, sont des homomorphismes .

En conséquence, l' e.v.t. - quotient d'une limite projective $\varprojlim E = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (u_\lambda ; E_\lambda)$ par le noyau de l'homomorphisme u associé (et donc $\varprojlim E$ lui-même si u est injectif) est isomorphe à un sous-e.v.t. de l'espace -produit $\prod_\lambda E_\lambda$.

De même, le sous- e.v.t. d'une limite inductive $\varinjlim E = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (v_\lambda ; F_\lambda)$, image de la somme directe topologique $\underset{\lambda}{\oplus} F_\lambda$ par l'homomorphisme v associé, (et donc $\varinjlim E$ si v est surjectif) est isomorphe au quotient de $\underset{\lambda}{\oplus} F_\lambda$ par le noyau de v .

Si en effet $(p, \bar{u}, i)$ est la décomposition canonique de l'application u associée à la limite projective $\varprojlim E$, alors

$$\varprojlim E = \varprojlim (i \circ \bar{u} \circ p ; \prod_\lambda E_\lambda) = \varprojlim (\bar{u} \circ p ; u(E)) ;$$

-26-

d'autre part, si $(p, \bar{v}, i)$ est la décomposition canonique de l'application v associée à la limite inductive $\underset{\rightarrow}{E}$, alors

$$v(\underset{\lambda}{\oplus} E_\lambda) = v(\underset{\lambda}{\oplus} E_\lambda)$$

d'après le corollaire 2 de la proposition 3, et

$$v(\underset{\lambda}{\oplus} E_\lambda) = \lim_{\rightarrow} (\bar{v} \circ p ; \underset{\lambda}{\oplus} E_\lambda) .$$

La suite du corollaire est une conséquence immédiate de la définition des homomorphismes . *

Definition :

On appellera désormais " homomorphisme projectif " (resp. " homomorphisme inductif ") l'homomorphisme associé à une limite projective (resp. inductive) .

Remarque :

Un homomorphisme projectif est injectif si et seulement si, pour tout $x \in \underset{\leftarrow}{E}$, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $u_\lambda^{-1}(u_\lambda(x))$ soit réduit à x ; en particulier, u sera injective, si l'une quelconque des applications u_λ l'est.

Un homomorphisme inductif est surjectif si et seulement si $\underset{\rightarrow}{E}$ est engendré par la réunion des images des v_λ .

Definition :

On appellera " limite improjective " (resp. " limite surinductive ") une limite projective (resp. inductive) dont l'homomorphisme associé est injectif (resp. surjectif) .

Le corollaire 3 nous donne donc une caractérisation de ces limites particulières :

Corollaire 3 : Caractérisation des limites improjectives et surinductives.

Toute limite improjective est sous-e.v.t. de l'e.v.t.-produit de ses espaces de définition E_λ ; elle est donc séparée lorsque les E_λ le sont, et si ceux-ci sont complets, elle l'est si et seulement si elle est fermée dans l'espace-produit.

Toute limite surinductive est un e.v.t.-quotient de la somme directe topologique de ses espaces de définition.

-27-

Comme la séparation et la complétion ne sont pas nécessaire - ment conservées par passage au quotient, nous n'aurons pas pour les li - mites surinductives le même énoncé que pour les limites improjectives ; ce que nous pouvons dire, compte-tenu du corollaire 2, et du corollaire 2 de la proposition 3, est valable pour les limites inductives générales :

Corollaire 4 : Séparation et complétion dans les limites inductives .

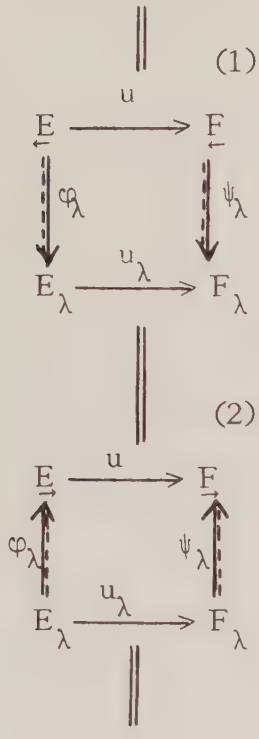
Une limite inductive d' e.l.c. séparés est séparée si et seulement si le noyau de l'homomorphisme associé v est fermé dans la somme directe topologique de ses espaces de définition ; si ceux-ci sont complets, elle est complète si et seulement si le quotient de la somme directe par le noyau de v est complet .

En effet F est séparé (resp. complet) si et seulement si $\overleftarrow{v(\oplus_\lambda E_\lambda)}$ l'est ; or cet espace est isomorphe à l' espace quotient $\overrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}/\ker v$; le cas de la complétion est donc démontré ; quant à la séparation, celle des E_λ est équivalente à celle de la somme directe $\overrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$, et par conséquent le quotient est séparé si et seulement si le noyau de v est fermé, d'où le résultat cherché . *

Intéressons-nous maintenant à la façon dont sont transportés les homomorphismes par les limites projectives et inductives :

-28-

Theoreme 9 : Premier théorème de transfert d'homomorphie .



(1) : Limites projectives : On considère deux limites projectives

$$\underset{\leftarrow}{E} = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda ; E_\lambda) \quad \text{et} \quad \underset{\leftarrow}{F} = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda ; F_\lambda)$$

sur le même ensemble d'indices Λ , liées par la famille indexée par Λ des diagrammes commutatifs linéaires ci-contre ; alors, si les u_λ et u sont injectives, l'homomorphie des u_λ entraîne celle de u .

(2) : Limites inductives : Soient de même deux limites inductives

$$\underset{\rightarrow}{E} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda ; E_\lambda) \quad \text{et} \quad \underset{\rightarrow}{F} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda ; F_\lambda)$$

sur le même ensemble d'indices Λ , et liées par la famille indexée par Λ des diagrammes commutatifs linéaires ci-contre; alors, si les u_λ et u sont surjectives, l'homomorphie des u_λ entraîne celle de u .

C'est une conséquence de la caractérisation des homomorphismes injectifs et surjectifs (th. 8 corol.1) et de la transitivité des limites projectives et inductives (th.2 et 2 bis).

Cas projectif : si chaque u_λ est un homomorphisme injectif, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $E_\lambda = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (u_\lambda ; F_\lambda)$, et donc

$$\underset{\leftarrow}{E} = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda ; E_\lambda) = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (u_\lambda \circ \varphi_\lambda ; F_\lambda) = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda \circ u ; F_\lambda) = \varprojlim (u ; \underset{\leftarrow}{F})$$

d'où le résultat puisque u est injective .

Cas inductif : de même, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $F_\lambda = \varinjlim (u_\lambda ; E_\lambda)$ puisque les u_λ sont des homomorphismes surjectifs, et la surjection u en sera un aussi du fait des égalités vectorielles topologiques :

$$\underset{\rightarrow}{E} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda ; E_\lambda) = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda \circ u_\lambda ; E_\lambda) = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (u \circ \varphi_\lambda ; E_\lambda) = \varinjlim (u ; \underset{\rightarrow}{E})$$

*

-29-

Corollaire 1 : Conservation de l'homomorphie par passage au produit et à la somme directe .

Considérons deux familles d' e.l.c. $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sur le même ensemble d'indices Λ, et pour chaque $\lambda\in\Lambda$, un homomorphisme vectoriel topologique $u_\lambda : E_\lambda \longrightarrow F_\lambda$.

(1) Si les u_λ sont injectifs, l'application-produit $u = \Pi_\lambda u_\lambda$ est un homomorphisme injectif entre les espaces-produits $\varprojlim_\lambda E_\lambda$ et $\varprojlim_\lambda F_\lambda$.

(2) Si les u_λ sont surjectifs, l'application-somme directe $\tilde{u} = \oplus_\lambda u_\lambda$ est un homomorphisme surjectif entre les sommes directes topologiques respectives .

C'est immédiat, puisque $u = \Pi_\lambda u_\lambda$ est injectif quand les u_λ le sont, et que, de même, $\tilde{u} = \oplus_\lambda u_\lambda$ est surjectif quand les u_λ le sont .

Corollaire 2 : Application aux sous- e.v.t. et e.v.t.-quotients .

Soient $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d' e.v.t. localement convexes, et, pour chaque $\lambda\in\Lambda$, un sous-espace vectoriel F_λ de E_λ . Alors le produit vectoriel topologique des sous - e.v.t. $\varprojlim_\lambda F_\lambda$ est isomorphe à un sous- e.v.t. du produit des E_λ , soit :

$$\varprojlim_\lambda F_\lambda \approx \varprojlim (\Pi_\lambda i_\lambda ; \varprojlim_\lambda E_\lambda) = (\varprojlim_\lambda F_\lambda) \quad ;$$

de même la somme directe topologique des espaces-quotients $(E_\lambda/F_\lambda)_{\longrightarrow}$ est isomorphe à un quotient de la somme directe topologique des E_λ, plus précisément :

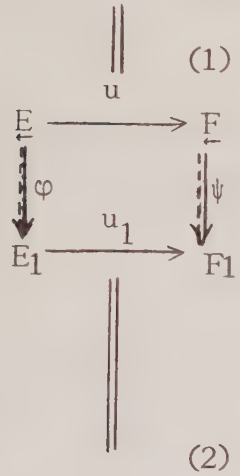
$$\oplus_\lambda (E_\lambda/F_\lambda)_{\longrightarrow} \approx (\oplus_\lambda E_\lambda)_{\longrightarrow} / (\oplus_\lambda F_\lambda)_{\longrightarrow}$$

On applique le corollaire 1 en considérant, dans le premier cas, les injections canoniques $i_\lambda : F_\lambda \longrightarrow E_\lambda$; par définition, ce sont des homomorphismes et l'injection canonique de $\Pi_\lambda F_\lambda$ dans $\Pi_\lambda E_\lambda$, qui n'est autre que $\Pi_\lambda i_\lambda$, est un homomorphisme .

-30-

Dans le second cas, les projections canoniques p_λ sont des homomorphismes surjectifs, et par conséquent $p = \oplus_\lambda p_\lambda$ en est un aussi. Par conséquent la somme directe topologique des espaces quotients est limite inductive de $\oplus_\lambda E_\lambda$ associée à p, et donc isomorphe à l'espace quotient de $\oplus_\lambda E_\lambda$ par le noyau de p ; or un élément $\oplus_\lambda x_\lambda$ de celui-ci est tel que $p(\oplus_\lambda x_\lambda) = \oplus_\lambda p_\lambda(x_\lambda) = O$, ce qui est équivalent à $p_\lambda(x_\lambda) = O$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et donc $x_\lambda \in \ker p_\lambda = F_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit enfin $\oplus_\lambda x_\lambda \in \oplus_\lambda F_\lambda$.

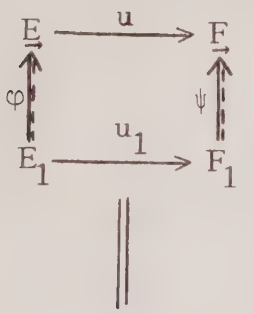
Theoreme 10 : Théorème de transfert inverse de l'homomorphie .



(1) : Limites projectives : On considère deux limites projectives

$\underleftarrow{E} = \underleftarrow{\lim}\,(\varphi ; E_1)$ et $\underleftarrow{F} = \underleftarrow{\lim}\,(\psi ; F_1)$

associées toutes deux à une seule application, et liées par le diagramme commutatif linéaire ci-contre ; alors, si φ_o est surjective, l'homomorphie de u entraîne celle de u_1, et si de plus, la restriction de ψ à u(E) est injective, l'homomorphie de l'un entraîne celle de l'autre .

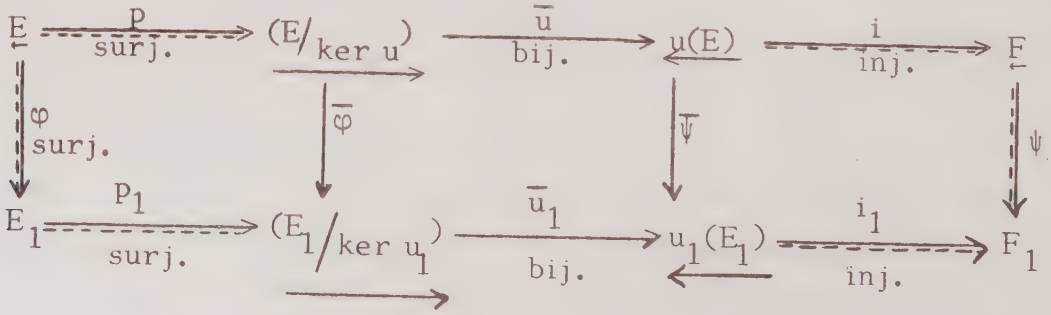


(2) : Limites inductives : Soient de même les deux limites inductives

$\underrightarrow{E} = \underrightarrow{\lim}\,(\varphi ; E_1)$ et $\underrightarrow{F} = \underrightarrow{\lim}\,(\psi ; F_1)$

associées toutes deux à une seule application, et liées par le diagramme commutatif linéaire ci-contre ; alors, si la restriction de ψ à $u_1(E_1)$ est injective, l'homomorphie de u entraîne celle de u_1, et si de plus φ est surjective, l'homomorphie de l'un entraîne celle de l'autre .

(1) Cas projectif : On considère les décompositions canoniques respectives :



L'existence de $\bar{\psi}$ et de $\bar{\varphi}$ est immédiate, de par la commutativité du diagramme de définition, et de la bijectivité de $\bar{u}$ et $\bar{u}_1$.

$\varprojlim u(E)$ est limite projective par $\bar{\psi}$ de $\varprojlim u_1(E_1)$, puisque l'on a $\varprojlim (\bar{\psi} ; u_1(E_1)) = \lim(i_1 \circ \bar{\psi} ; F_1) = \varprojlim (\psi \circ i ; F_1) = \varprojlim (i ; \underset{\leftarrow}{E}) = \varprojlim u(E)$; puisque φ est surjective, $\bar{\varphi}$ et par conséquent $\bar{\psi}$ le sont aussi, et le théorème de retour (th.5) entraîne que l'on a :

$$E_1 = \varinjlim (\varphi ; \underset{\leftarrow}{E}) \quad \text{et} \quad \varprojlim u_1(E_1) = \varinjlim (\bar{\psi} ; \varprojlim u(E)) \ .$$

Si u est un homomorphisme , nous aurons, du fait de leur caractérisation (th.8) $\varprojlim u(E) = \varinjlim (\bar{u} \circ p; \underset{\leftarrow}{E})$ donc $\varprojlim u_1(E_1) = \varinjlim (\bar{\psi} \circ \bar{u} \circ p ; \underset{\leftarrow}{E}) = \varinjlim (\bar{u}_1 \circ p_1 \circ \varphi; \underset{\leftarrow}{E}) = \varinjlim (\bar{u}_1 \circ p_1 ; E_1)$ et u_1 est donc un homomorphisme .

Inversement, puisque φ est surjective, $\varinjlim (E_1/\ker u_1)$ est limite inductive par $\bar{\varphi}$ de $\varinjlim (E/\ker u)$, compte-tenu des égalités :

$$\varinjlim (\bar{\varphi} ; \varinjlim (E/\ker u)) = \varinjlim (\bar{\varphi} \circ p ; \underset{\leftarrow}{E}) = \varinjlim (p_1 \circ \varphi; \underset{\leftarrow}{E}) = \varinjlim (p_1 ; E_1)$$
$$= \varinjlim (E_1/\ker u_1) ;$$

si donc la restriction de ψ à u(E) est injective, $\bar{\psi}$ et $\bar{\varphi}$ le sont aussi, et l'on a :

$$\varprojlim u(E) = \varprojlim (\bar{\psi} ; \varprojlim u_1(E_1)) \quad \text{et} \quad \varinjlim (E/\ker u) = \varprojlim (\bar{\varphi} ; \varinjlim (E_1/\ker u_1))$$

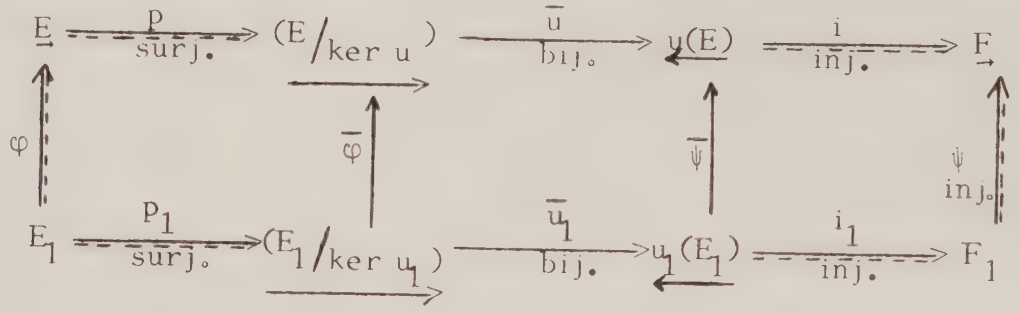
et alors l'homomorphie de u_1, qui est équivalente, toujours en raison du théorème de caractérisation, à l'égalité $\varinjlim (E_1/\ker u_1) = \varprojlim (\bar{u}_1 ; u_1(E_1))$ entraîne :

$$\varinjlim (E/\ker u) = \varprojlim (\bar{u}_1 \circ \bar{\varphi} ; \varprojlim u_1(E_1) = \varprojlim (\bar{\psi} \circ \bar{u} ; \varprojlim u_1(E_1)) = \varprojlim (\bar{u} ; \varprojlim u(E))$$

d'où l'homomorphie de u .

-32-

(2) Cas inductif : On considère de même les décompositions canoniques :



$\xrightarrow{(E/\ker u)}$ est limite inductive par $\bar{\varphi}$ de $\xrightarrow{(E_1/\ker u_1)}$, puisque l'on a

$$\varinjlim(\bar{\varphi}\,;\,\xrightarrow{(E_1/\ker u_1)}) = \varinjlim(\bar{\varphi}\circ p_1\,;\,E_1) = \varinjlim(p\circ\varphi\,;\,E_1) = \xrightarrow{(E/\ker u)};$$

puisque ψ est injective sur $u_1(E_1)$, $\bar{\psi}$ et $\bar{\varphi}$ le sont aussi, et nous avons, d'après le théorème de retour (th.5) :

$$F_1 = \varprojlim(\psi\,;\,\underset{\rightarrow}{F}) \quad \text{et} \quad \xrightarrow{(E_1/\ker u_1)} = \varinjlim(\bar{\varphi}\,;\,\xrightarrow{(E/\ker u)})$$

Si u est un homomorphisme, en raison de leur caractérisation (th.8), nous aurons :

$$\xrightarrow{(E/\ker u)} = \varprojlim(i\circ\bar{u}\,;\,\underset{\rightarrow}{F})$$

donc

$$\xrightarrow{(E_1/\ker u_1)} = \varprojlim(i\circ\bar{u}\circ\bar{\varphi}\,;\,\underset{\rightarrow}{F}) = \varprojlim(\ldots\circ i_1\circ u_1\,;\,\underset{\rightarrow}{F}) = \varprojlim(i_1\circ u_1\,;\,F_1)$$

d'où l'homomorphie de u_1 .

Inversement, puisque $\bar{\psi}$ est injective, $u_1(E_1) = \lim(\bar{\psi}\,;u(E))$ car $\varprojlim(\bar{\psi}\,;\underset{\leftarrow}{u(E)}) = \varprojlim(i\circ\bar{\psi}\,;\,\underset{\rightarrow}{F}) = \varprojlim(\psi\circ i_1\,;\,\underset{\rightarrow}{F}) = \varprojlim(i_1\,;\,F_1)$; si donc φ est de plus surjective, $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$ le sont aussi, et l'on a

$$\xrightarrow{(E/\ker u)} = \varinjlim(\bar{\varphi}\,;\,\xrightarrow{(E_1/\ker u_1)}) \quad \text{et} \quad \underset{\leftarrow}{u(E)} = \varprojlim(\bar{\psi}\,;\,\underset{\leftarrow}{u_1(E_1)})$$

-33-

et si u_1 est un homomorphisme, on a $\underleftarrow{u_1(E_1)} = \underrightarrow{\lim}\,(\bar{u}_1 \,;\, \underrightarrow{(E_1/\ker u_1)})$

et donc

$$\underleftarrow{u(E)} = \underrightarrow{\lim}\,(\bar{\psi} \circ \bar{u}_1 \,;\, \underrightarrow{(E_1/\ker u_1)}) = \underleftarrow{\lim}\,(\bar{u} \circ \bar{\varphi} \,;\, \underrightarrow{E_1/\ker u_1})$$

$$= \underrightarrow{\lim}\,(\bar{u},\, \underrightarrow{E/\ker u})$$

d'où l'homomorphie de u . *

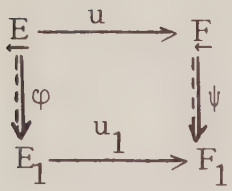
Remarque touchant le transfert de l'homomorphie .

Dans le théorème direct, nous avons été obligés d'imposer des conditions à u et aux u_λ ; même dans le cas de limites associées à une seule application, il semble peu probable de pouvoir lever ces restrictions, sans en rajouter d'autres ; et nous venons de voir dans le théorème inverse que le transfert de l'homomorphie de u_1 à u suppose alors des conditions draconiennes, et nous verrons un cas (cf. chap.II, remarque du th.3) où le transfert est faux .

Nous allons maintenant démontrer que, dans le cas où $\underleftarrow{E}$ et $\underleftarrow{F}$ sont des limites improjectives denses (i.e. des limites projectives associées à une application injective dont l'image est dense dans l'espace de définition de la limite) , le transfert d'homomorphie de u_1 à u nécessite une condition portant sur les noyaux respectifs, et qui a priori ne saurait être vérifiée pour des applications u et u_1 quelconques ; ce théorème nous sera nécessaire lors de l'étude des duals des espaces de Sobolev .

-34-

Theoreme 11 : DEUXIEME THEOREME DE TRANSFERT D'HOMOMORPHIE.



Soient E_1, F_1 deux e.v.t. localement convexes séparés, et

$$\underset{\leftarrow}{E} = \varprojlim (\varphi ; E_1) \qquad \underset{\leftarrow}{F} = \varprojlim (\psi ; F_1)$$

deux limites improjectives denses (cf. remarque précédente) liées par le diagramme commutatif linéaire ci-contre .

Alors u, considérée comme application dans son image, se factorise par φ en une application linéaire continue unique v de E_1 dans le complété $\widehat{u(E)}$ de $u(E)_{\rightarrow} = \varinjlim (u ; E)$, et une condition nécessaire et suffisante pour que u soit un homomorphisme quand u_1 en est un, est que v se factorise par u_1, donc que soit vérifiée la condition :

$$\ker u_1 \subset \ker v \qquad \text{(condition faible des noyaux)}$$

(1) Nous démontrerons d'abord le théorème dans le cas où u et u_1 sont surjectives ; alors, d'après le corollaire 1 du théorème 8 (théorème de caractérisation des homomorphismes), l'homomorphie de u_1 est équivalente à $F_1 = \underset{\rightarrow}{F_1} = \varinjlim (u_1 ; E_1)$, celle de u à

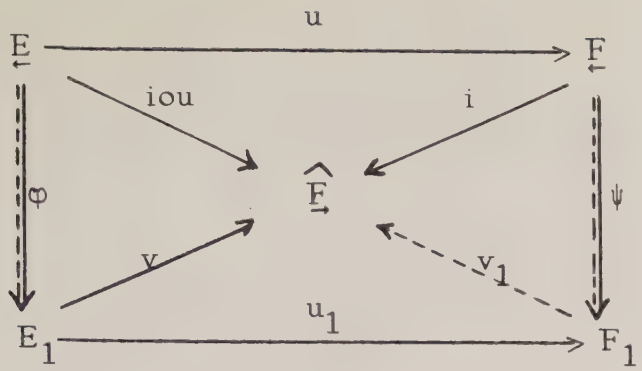
$$\underset{\leftarrow}{F} = \underset{\rightarrow}{F} = \varinjlim (u ; E) \quad ;$$

cette dernière égalité sera vérifiée si et seulement si l'identité de F est continue de $\underset{\leftarrow}{F}$ dans $\underset{\rightarrow}{F}$, ou encore si l'injection canonique i de $\underset{\leftarrow}{F}$ dans le complété $\widehat{\underset{\rightarrow}{F}}$ de $\underset{\rightarrow}{F}$ est continue .

F_1 étant séparé par hypothèse, la limite improjective $\underset{\leftarrow}{F}$ est séparée (th.8 corol.3), et par conséquent la limite surinductive $\underset{\rightarrow}{F} = \varinjlim (u ; E)$ est séparée, puisque plus fine que $\underset{\leftarrow}{F}$; et $\widehat{\underset{\rightarrow}{F}}$ est donc séparé comme complété d'un espace séparé (cf. Bourbaki Top. Gén.chap.2, paragraphe 3, complété par Schaefer chap.I, 1.5) .

u est évidemment continue de $\underset{\leftarrow}{E}$ dans $\underset{\rightarrow}{F}$, et i continue de $\underset{\rightarrow}{F}$ dans $\widehat{\underset{\rightarrow}{F}}$; d'autre part, l'application φ, considérée comme application à valeurs dans $\varphi(E)$, est un isomorphisme de $\underset{\leftarrow}{E}$ sur $\underset{\leftarrow}{\varphi(E)}$;

-35-



l'application $i \circ u \circ \varphi^{-1}$ est donc continue de $\varphi(E)$ dans $\hat{F}$; puisque $\varphi(E)$ est dense dans l'espace séparé E_1, et que F est un espace séparé complet, on peut appliquer le théorème de prolongement (cf. Bourbaki, mêmes références) à cette application $i \circ u \circ \varphi^{-1}$, qui se prolonge ainsi en une application linéaire continue unique v, qui est l'unique factorisée linéaire continue de $i \circ u$ par φ.

Si v se factorise à son tour par u_1, sa factorisée v_1 sera linéaire, et entièrement déterminée puisque u_1 est surjective ; alors, puisque $F_1 = \varinjlim F_1$ du fait de l'homomorphie de u_1, la continuité de v_1 résulte de celle de v d'après la propriété universelle des limites inductives (th. 2 bis) et $v_1 \circ \psi$ sera continue de F dans $\hat{F}$. Or on a :

$$v_1 \circ \psi \circ u = v_1 \circ u_1 \circ \varphi = v_1 \circ u$$

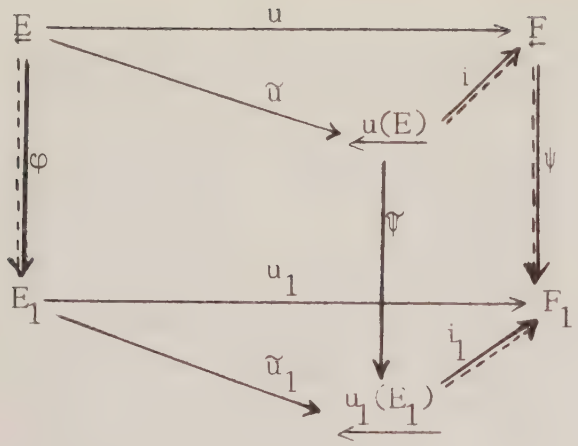
et donc $i = v_1 \circ \psi$ puisque u est surjective, et i est continue.

Inversement, supposons que u soit un homomorphisme, donc que l'application i est continue de F dans $\hat{F}$. Puisque ψ est une injection dense, et que F_1 est séparé, l'application linéaire continue $i \circ \psi^{-1} : \psi(F) \longrightarrow \hat{F}$ se prolonge en une application linéaire continue unique $\bar{v}_1 : F_1 \longrightarrow \hat{F}$; montrons que celle-ci est la factorisée de v par u_1. On a en effet les égalités :

$$i \circ u = \bar{v}_1 \circ \psi \circ u = \bar{v}_1 \circ u_1 \circ \varphi ,$$

et puisque u_1 est continue (c'est un homomorphisme), l'unicité de la factorisée linéaire continue de $i \circ u$ par φ entraîne l'égalité : $\bar{v}_1 \circ u_1 = v$, soit le résultat cherché.

-36-



(2) Cas général :

Nous allons nous ramener au cas précédent en utilisant les décompositions canoniques respectives de u et de u_1 .

La restriction de ψ à u(E), a son image contenue dans $u_1(E_1)$, puisque $\psi \circ u = u_1 \circ \varphi$; d'où l'existence de $\mathfrak{U}$ égale à $\psi \circ i$ considérée comme application à valeurs dans $u_1(E_1)$.

D'autre part, le premier théorème de transfert d'homomorphie (th.9), appliqué aux limites projectives $\varprojlim (\mathfrak{U} ; u_1(E_1))$ et $\underleftarrow{F}$, montre que $\underleftarrow{u(E)}$ est limite inductive de $u_1(E_1)$ associée à $\mathfrak{U}$: d'autre part $\mathfrak{U}$ est une injection par définition même, et la continuité de u_1 entraîne les relations :

$$u_1(E_1) = u_1(\overline{\varphi(E)}) \subset \overline{u_1(\varphi(E))} = \overline{\psi \circ u(E)} = \overline{\mathfrak{U}(u(E))}$$

et ainsi $\underleftarrow{u(E)}$ est une limite improjective dense ; nous sommes donc ramenés au cas précédent puisque l'homomorphie de u et de u_1 est équivalente à celle de $\tilde{u}$ et de $\tilde{u}_1$, qui sont toutes deux surjectives .
($\underleftarrow{u_1(E_1)}$ est séparé comme sous-e.v.t. de l'espace séparé F_1)

*

Remarques sur le théorème :

- L'étude de la démonstration permet de l'améliorer, en supposant seulement que $\underleftarrow{E}$ est limite improjective dense, et $\underleftarrow{F}$ limite projective : alors l'homomorphie de u_1 et la condition faible des noyaux entraînent que u est un homomorphisme et que la restriction de ψ à u(E) est une injection dense dans $u_1(E_1)$: en effet les deux conditions entraînent l'existence de v_1 telle que $(i : \underleftarrow{u(E)} \longrightarrow \underrightarrow{u(E)}) = v_1 \circ \mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}$ est donc injective puisque i l'est, et la densité de $\mathfrak{U}(E)$ dans $\widehat{u_1(E_1)}$ a été démontrée dans le cas général, sans utiliser celle de ψ . inversement ces deux résultats , plus la continuité de u_1, entraînent la condition faible des noyaux .

- Nous verrons au paragraphe suivant une condition suffisante, appelée " condition forte des noyaux ", qui est nécessaire quand le noyau de u admet un supplémentaire topologique .

-37-

I.5 : UTILISATION DE LA NOTION DE SUPPLEMENTAIRE TOPOLOGIQUE .

Soient E un e.v.t. localement convexe, F et F' deux sous-espaces algébriquement supplémentaires dans l'espace vectoriel sous-jacent de E, i, i' les injections canoniques respectives de F et F' dans E; p, p' les projections de F et G, considérés comme application dans leur image, $\chi = (p, p')$ l'isomorphisme algébrique de E sur $F \times G$, et $\underset{\leftarrow}{F}$, $\underset{\leftarrow}{F'}$ les sous-e.v.t. de E .

Proposition 5: Caractérisation des supplémentaires topologiques .

Sous les hypothéses précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) E est somme directe topologique de $\underset{\leftarrow}{F}$ et $\underset{\leftarrow}{F'}$.

(2) χ est un isomorphisme vectoriel topologique de E sur l'e.v.t.-produit de $\underset{\leftarrow}{F}$ et $\underset{\leftarrow}{F'}$.

(2') χ est continue de E dans $\underset{\leftarrow}{F} \times \underset{\leftarrow}{F'}$.

(3) p et p' sont des homomorphismes .

(3') p ou p' est continue .

(4) les e.v.t.-quotients $\underset{\rightarrow}{(E/F)}$ et $\underset{\rightarrow}{(E/F')}$ sont respectivement isomorphes à $\underset{\leftarrow}{F'}$ et $\underset{\leftarrow}{F}$.

(4') l'e.v.t.-quotient $\underset{\rightarrow}{(E/F')}$ est inclus topologiquement dans $\underset{\leftarrow}{F}$.

(ou même énoncé pour $\underset{\rightarrow}{(E/F)}$ et $\underset{\leftarrow}{F'}$)

(1) $\Leftrightarrow$ (2) résulte des définitions respectives du produit et de la somme directe topologiques, c'est sous cette forme que nous avons défini les supplémentaires topologiques au paragraphe 3.

les implications (2) $\Rightarrow$ (2'), (3) $\Rightarrow$ (3'), (4) $\Rightarrow$ (4') sont évidentes .

(2) $\Rightarrow$ (2') car χ^{-1} est continue comme restriction de l'addition à $F \times F'$.

(2) $\Rightarrow$ (3) et (2') $\Rightarrow$ (3'), car les projections π et π' du produit sont des homomorphismes, vérifiant $p = \pi \circ \chi$ et $p' = \pi' \circ \chi$.

-38-

(3)⇏ (4) et (3')⇏ (4') car p et p' sont surjectives et ker p = F', ker p' = F.

(4')⇒ (2') car $\varinjlim (p ; E) = \varinjlim (\bar{p} ; (E_{/F'})) < \underset{\leftarrow}{F}$ si $\bar{p}$ est la bijection associée à p dans la décomposition canonique de p . *

Proposition 6 : Propriétés des supplémentaires topologiques d'un espace séparé.

Soient E un e.v.t. localement convexe séparé, et F, F' deux supplémentaires topologiques de E, de projecteurs associés p et p' . Alors F et F' sont fermés dans E. Si de plus E est complet, alors $(E_{/F})$ et $(E_{/F'})$ le sont aussi .

Puisque E est séparé, $\underset{\leftarrow}{F}$ (resp. $\underset{\leftarrow}{F'}$) l'est aussi ; {O} est donc fermé dans $\underset{\leftarrow}{F}$ (resp. $\underset{\leftarrow}{F'}$), et F' (resp. F) est fermé dans E comme noyau du projecteur continu $p : E \longrightarrow \underset{\leftarrow}{F}$ (resp. $p' : E \longrightarrow \underset{\leftarrow}{F'}$) .

Si E est complet, ses sous-e.v.t. fermés $\underset{\leftarrow}{F}$ et $\underset{\leftarrow}{F'}$ le sont aussi, et par conséquent les e.v.t.-quotients $(E_{/F'})$ et $(E_{/F})$ aussi, puisqu'ils leur sont isomorphes d'après la proposition 5. *

Ceci permet d'améliorer le corollaire 4 du théorème de caractérisation des homomorphismes (th.8) :

Proposition 7 : Séparation et complétion dans les limites inductives (suite) .

Soient $\underset{\leftarrow}{F} = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (v_\lambda ; F_\lambda)$ une limite inductive, et v son homomorphisme associé ; si le noyau de celui-ci admet un supplémentaire topologique dans la somme directe topologique $\underset{\rightarrow}{\oplus_\lambda F_\lambda}$, alors $\underset{\leftarrow}{F}$ est séparé (resp. complet) lorsque les F_λ sont séparés (resp. complets) .

L'intérêt que présentent les homomorphismes dont le noyau ou l'image admet un supplémentaire topologique, motive la caractérisation suivante, que nous utiliserons lors de l'étude des espaces de Sobolev :

-39-

*Theoreme 12 :

Soient E, F deux e.l.c. et u : E ⟶ F une application linéaire continue. Nous avons les équivalences (1) ⇔ (1') ⇔ (1'') et (2) ⇔ (2') ⇔ (2'') .

(1) u est un homomorphisme injectif dont l'image admet un supplémentaire topologique.

(1') u est continûment inversible à gauche (i.e. $\exists\, v \in \mathfrak{L}(F,E) : v \circ u = Id_E$).

(1'') u est injective, et son application réciproque : $(\overline{u})^{-1} : u(E) \longrightarrow E$ se prolonge continûment à F.

(2) u est un homomorphisme surjectif dont le noyau admet un supplémentaire topologique.

(2') u est continûment inversible à droite (i.e. $\exists\, v \in \mathfrak{L}(F,E) : u \circ v = Id_F$).

(2'') il existe un sous-espace vectoriel M de E tel que la restriction de u à M soit un isomorphisme de M sur F.

(1) ⇒ (1'') Soit p un projecteur continu de F sur u(E). Alors $(\overline{u})^{-1} \circ p$ est un prolongement continu de $\overline{u}$ (application u considérée à valeurs dans son image)

(1'') ⇒ (1') Soit v le prolongement continu de $(\overline{u})^{-1}$; alors $v \circ u = (\overline{u})^{-1} \circ \overline{u} = Id_E$.

(1') ⇒ (1) Si u admet un inverse à gauche continu, u est injective ; de plus, c'est un homomorphisme, car pour tout e.l.c. G, et toute application linéaire $f : G \longrightarrow E$, la continuité de $u \circ f$ entraîne celle de $v \circ u \circ f = f$, et donc $E = \underline{E}$ (d'où le résultat d'après le théorème de retour (th.5)) .

Enfin, $u \circ v$ définit un projecteur continu sur u(E), car

$$(u \circ v) \circ (u \circ v) = u \circ (v \circ u) \circ v = u \circ v$$

et donc u(E) admet le supplémentaire topologique $\ker u \circ v = \ker v$.

(2) ⇒ (2'') Soient M un supplémentaire topologique du noyau de u, i l'injection canonique de M dans E, p la projection canonique de E sur $(E/\ker u)$. Alors la restriction de u à M est $u \circ i$ qui est injective puisque $\ker (u \circ i) = \ker u \cap M = \{0\}$; d'autre part $u \circ i = \overline{u} \circ p \circ i$, d'où le résultat puisque $\overline{u}$ est un isomorphisme, et $p \circ i$ est aussi un isomorphisme de M sur $(E/\ker u)$.

⟶

-40-

(2'') ⇒ (2')

Si i désigne toujours l'injection canonique de M dans E, la restriction u o i de u à M est un isomorphisme, et donc l'application $i \circ (u \circ i)^{-1}$ est linéaire continue, d'où le résultat cherché, puisque $u \circ (i \circ (u \circ i)^{-1}) = Id_F$.

(2') ⇒ (2)

Puisque u admet un inverse à droite, u est surjective ; d'après le théorème de retour, l'homomorphie de u est équivalente à l'égalité $F = \varinjlim (u ; E)$, qui résulte de ce que pour tout e.l.c. G et toute application linéaire $f : F \longrightarrow G$, la continuité de f o u entraîne celle de $f \circ u \circ v = f$ puisque v est continue .

Enfin v o u définit un projecteur continu sur v(E), puisque

$$(v \circ u) \circ (v \circ u) = v \circ (u \circ v) \circ u = v \circ u$$

et donc l'image de v admet pour supplémentaire topologique le noyau de v o u, qui n'est autre que le noyau de u puisque v est injective ; d'où le résultat cherché . *

Il résulte immédiatement de cette démonstration le corollaire suivant :

Corollaire :

Sous les hypothèses du théorème 12, si l'on munit Im u, ker u, Im v, ker v, des structures induites respectives, on a les égalités suivantes

- dans le premier cas, $F = \underline{\text{Im } u \oplus \ker v}$
- dans le deuxième cas, $E = \underline{\ker u \oplus \text{Im } v}$

Theoreme 13 : Décomposition topologique des produits et sommes directes .

Soient $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'e.l.c. indexés par l'ensemble d'indices Λ, et $\mathfrak{M}$ une partie de Λ. Alors les injections canoniques :

$$i_{\mathfrak{M}} : \left| \begin{array}{ccc} \prod_{\lambda \in \mathfrak{M}} E_\lambda & \longrightarrow & \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \\ (x_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{M}} & \longrightarrow & (x_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{M}} \times \{0\}^{\Lambda - \mathfrak{M}} \end{array} \right.$$

et

$$j_{\mathfrak{M}} : \left| \begin{array}{ccc} \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{M}} E_\lambda & \longrightarrow & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \\ \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{M}} x_\lambda & \longrightarrow & (\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{M}} x_\lambda) \times \{0\}^{\Lambda - \mathfrak{M}} \end{array} \right.$$

et les surjections canoniques :

$$\pi_{\mathfrak{M}} : \left| \begin{array}{ccc} \prod_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda & \longrightarrow & \prod_{\lambda \in \mathfrak{M}} E_\lambda \\ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} & \longrightarrow & (x_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{M}} \end{array} \right.$$

et

$$\rho_{\mathfrak{M}} : \left| \begin{array}{ccc} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda & \longrightarrow & \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{M}} E_\lambda \\ \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda & \longrightarrow & \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{M}} x_\lambda \end{array} \right.$$

sont des homomorphismes .

-41-

Nous avons en effet les égalités

$$\pi_{\mathfrak{M}} \circ i_{\mathfrak{M}} = \mathrm{Id}_{\prod_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_\lambda} \qquad \text{et} \qquad \rho_{\mathfrak{M}} \circ j_{\mathfrak{M}} = \mathrm{Id}_{\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_\lambda} .$$

Le théorème résultera donc du théorème 12 si nous montrons que $i_{\mathfrak{M}}$, $j_{\mathfrak{M}}$, $\pi_{\mathfrak{M}}$, $\rho_{\mathfrak{M}}$ sont continues pour les topologies respectives. Or si $\pi_{\mathfrak{M},\lambda}$ et $\pi_{\Lambda,\lambda}$ désignent les projections canoniques respectives associées à $\prod_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_\lambda$ et $\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, et de même $j_{\mathfrak{M},\lambda}$ et $j_{\Lambda,\lambda}$ les injections canoniques associées à $\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_\lambda$ et $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, nous avons, pour tout $\lambda\in\mathfrak{M}$, les égalités :

$$\left|\begin{array}{l} \pi_{\Lambda,\lambda} \circ i_{\mathfrak{M}} = \pi_{\mathfrak{M},\lambda} \\ \pi_{\mathfrak{M},\lambda} \circ \pi_{\mathfrak{M}} = \pi_{\Lambda,\lambda} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} j_{\mathfrak{M}} \circ j_{\mathfrak{M},\lambda} = j_{\Lambda,\lambda} \\ \rho_{\mathfrak{M}} \circ j_{\Lambda,\lambda} = j_{\mathfrak{M},\lambda} \end{array}\right.$$

et, pour tout $\lambda \in \Lambda - \mathfrak{M}$,

$$\pi_{\Lambda,\lambda} \circ i_{\mathfrak{M}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho_{\mathfrak{M}} \circ j_{\Lambda,\lambda} = 0$$

d'où les continuités cherchées compte-tenu de la propriété universelle des limites projectives et inductives (cf. chap. I parag. 1 th.1, et parag.2 th.1 bis), puisque $\pi_{\mathfrak{M}}$ (resp. $j_{\mathfrak{M}}$) est continue si et seulement si pour tout $\lambda\in\mathfrak{M}$, $\pi_{\mathfrak{M},\lambda} \circ \pi_{\mathfrak{M}}$ (resp. $j_{\mathfrak{M}} \circ j_{\mathfrak{M},\lambda}$) l'est, et que de même $i_{\mathfrak{M}}$ (resp. $\rho_{\mathfrak{M}}$) est continue si pour tout $\lambda\in\Lambda$, $\pi_{\Lambda,\lambda} \circ i_{\mathfrak{M}}$ (resp. $\rho_{\mathfrak{M}} \circ j_{\Lambda,\lambda}$) l'est . *

Corollaire 1 :

Sous les hypothèses du théorème 13, $\prod_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_\lambda$ et $\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_\lambda$ sont respectivement isomorphes à des sous-e.v.t. de $\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ et $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$; dans cet isomorphisme , ils admettent respectivement $\prod_{\lambda\in\Lambda-\mathfrak{M}} E_\lambda$ et $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda-\mathfrak{M}} E_\lambda$ comme supplémentaires topologiques, et sont en particulier des sous-espaces fermés si pour tout $\lambda\in\Lambda$, les E_λ sont séparés .

-42-

D'après les théorèmes 12 et 13, nous savons que $i_{\mathfrak{M}}$ et $j_{\mathfrak{M}}$ (resp. $\pi_{\mathfrak{M}}$ et $\rho_{\mathfrak{M}}$) sont des homomorphismes injectifs (resp. surjectifs) dont les images (resp. les noyaux) admettent respectivement des supplémentaires topologiques . Nous avons plus précisément, d'après le corollaire du théorème 12 :

$$\underset{\lambda\in\Lambda}{\overleftarrow{\prod}} E_\lambda = \overrightarrow{\operatorname{Im} i_{\mathfrak{M}} \oplus \ker \pi_{\mathfrak{M}}} \quad \text{et} \quad \underset{\lambda\in\Lambda}{\overrightarrow{\oplus}} E_\lambda = \overrightarrow{\operatorname{Im} j_{\mathfrak{M}} \oplus \ker \rho_{\mathfrak{M}}}$$

pour les structures induites respectives .

Or $$\ker \pi_{\mathfrak{M}} = \left(\prod_{\lambda\in\Lambda-\mathfrak{M}} E_\lambda\right) \times \{0\}^{\mathfrak{M}} = \operatorname{Im} i_{\Lambda-\mathfrak{M}}$$

et $$\ker \rho_{\mathfrak{M}} = \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda-\mathfrak{M}} E_\lambda\right) \oplus \{0\}^{(\mathfrak{M})} = \operatorname{Im} j_{\Lambda-\mathfrak{M}}$$

d'où le résultat cherché, par application de ce qui précède à $\Lambda-\mathfrak{M}$ au lieu de $\mathfrak{M}$.

La dernière assertion est l'application directe de la proposition 6. *

Corollaire 2 :

Soient $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d' e.l.c. indexés par Λ. Alors, pour tout $\lambda\in\Lambda$, on a les égalités topologiques :

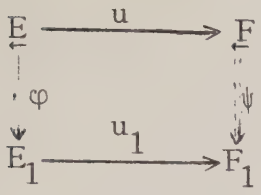
$$E_\lambda = \varprojlim (i_\lambda ; \underset{\lambda\in\Lambda}{\overleftarrow{\prod}} E_\lambda) = \varinjlim (\pi_\lambda ; \underset{\lambda\in\Lambda}{\overleftarrow{\prod}} E_\lambda) = \varprojlim (j_\lambda ; \underset{\lambda\in\Lambda}{\overrightarrow{\oplus}} E_\lambda) = \varinjlim (\rho_\lambda ; \underset{\lambda\in\Lambda}{\overrightarrow{\oplus}} E_\lambda)$$

Pour chaque $\lambda\in\Lambda$, on applique le théorème 13, avec $\mathfrak{M} = \{\lambda\}$; i_λ et j_λ (resp. π_λ et ρ_λ) sont donc des homomorphismes injectifs (resp. surjectifs), d'où le résultat grâce à la caractérisation des homomorphismes (cf. coroll. 1 du th.8) .

Nous allons également, grâce à la notion d'homomorphisme admettant un supplémentaire topologique, donner un autre critère au deuxième théorème de transfert d'homomorphie (th.11) :

-43-

Theoreme 14 : Corollaire du deuxième théorème d'homomorphie .



Soient E_1, F_1 deux e.v.t. localement convexes séparés , et

$$E = \varprojlim(\varphi ; E_1) \qquad F = \varprojlim(\psi ; F_1)$$

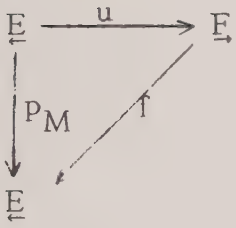
deux limites improjectives denses, liées par le diagramme commutatif linéaire ci-contre .

Alors, une condition suffisante pour que l'homomorphie de u_1 entraîne celle de u est que l'image par φ du noyau de u soit dense dans le noyau de u_1 (condition forte des noyaux) ; cette condition est nécessaire si le noyau de u admet un supplémentaire topologique .

Nous ne restreindrons pas la démonstration en supposant que u et u_1 sont surjectives (et ceci pour simplifier les notations), puisque $\ker u = \ker \tilde{u}$ et $\ker u_1 = \ker \tilde{u}_1$, ce que nous ferons désormais. Il suffit de montrer que la condition forte des noyaux entraîne la condition faible. Or l'intersection du noyau de v avec $\varphi(E)$ n'est autre que l'image par φ du noyau de (i o u), donc du noyau de u. On a donc la chaîne de relations

$$\ker u_1 = \varphi(\ker u) = \ker v \cap \varphi(E) \subset \overline{\ker v \cap \varphi(E)} = \overline{\ker v}$$

puisque $\varphi(E)$ est dense dans E_1, et que v est continue, donc de noyau fermé dans l'espace séparé E_1 .



Inversement , supposons que le noyau N de u admette un supplémentaire topologique M dans E , le projecteur $p_M : E \longrightarrow E$ associé à M est continu. Puisque $\ker p_M = N = \ker u$, p_M se factorise par u en une application linéaire f (unique puisque u est surjective) qui est continue de F dans E du fait de la définition de F et de la continuité de $f \circ u = p_M$.

Puisque $\varphi(E)$ est dense dans E_1, tout point y du noyau de u_1 est limite dans E_1 d'un filtre $(\varphi(x_i))$ image par φ d'un filtre (x_i) de E . Puisque u_1 est continue, $u_1 \circ \varphi(x_i)$ converge dans F_1 vers $u_1(y) = 0$;

-44-

comme $u_1 \circ \varphi = \psi \circ u$, $\psi \circ u(x_i)$ converge vers O dans F_1, donc dans $\underleftarrow{\psi(F)}$ et par conséquent $u(x_i)$ converge vers O dans $\underleftarrow{F}$ puisque ψ est un isomorphisme de $\underleftarrow{F}$ sur $\underleftarrow{\psi(F)}$.

Si donc u est un homomorphisme (surjectif), on aura $\underleftarrow{F} = \underleftarrow{E}$. ce qui entraîne la convergence de $p_M(x_i) = f \circ u(x_i)$ vers O dans $\underleftarrow{E}$, puisque f est continue de $\underleftarrow{E}$ dans $\underleftarrow{E}$, et par conséquent de $\varphi \circ p_M(x_i)$ vers O dans E_1 . Alors le filtre, contenu dans $\varphi(\ker u)$:

$$\varphi \circ p_N(x_i) = \varphi(x_i) - \varphi \circ p_M(x_i)$$

convergera vers y dans E_1, soit le résultat cherché .

*

Remarque :

La remarque qui suit le deuxième théorème d'homomorphie (th.11) s'applique encore : le sens direct est évident, et réciproquement, lorsque le noyau de u admet un supplémentaire topologique, l' homomorphie de u, l'injection de la restriction de ψ à u(E), et la continuité de u_1 , entraînent la condition forte des noyaux .

Corollaire :

Si u est continûment inversible à droite, la condition forte des noyaux est vérifiée .

En effet, d'après la proposition 8, u est un homomorphisme surjectif dont le noyau admet un supplémentaire topologique ; d'après le théorème 12, la condition forte des noyaux est donc nécessairement vérifiée.

-45-

I.6 : APPLICATION DE LA THEORIE DE LA DUALITE A UN PROBLEME D'HOMOMORPHIE .

Il s'agit dans ce paragraphe de donner une autre forme au deuxième théorème d'homomorphie (th.11), sous laquelle nous utiliserons ce théorème lors de l'étude de la dualité des espaces de Sobolev au chapitre III .

Dans les démonstrations qui vont suivre, pour conserver la commodité du langage des suites, nous utiliserons la convergence de Moore-Smith :

Definitions :

(1) On appelle " filtre au sens de Moore-Smith " (ou " net " ; cf. Kelley) toute famille $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments d'un espace topologique, indexée par un ensemble d'indices préordonné filtrant .

(2) Soit E un e.v.t. , de base $\mathfrak{B}$ de voisinages de O . On dit qu'un filtre au sens de Moore-Smith $(x_j)_{j \in J}$ " converge vers $x \in E$ " si l'on a la relation :

$$(\forall V \in \mathfrak{B}) \ (\exists\, j_V \in J) : (\forall\, j \geq j_V) \ (x_j - x \in V)$$

(3) Dans les mêmes hypothèses, on dira que $(x_j)_{j \in J}$ est un " filtre de Cauchy " si l'on a la relation :

$$(\forall V \in \mathfrak{B}) \ (\exists\, j_V \in J) : (\forall\, j_1, j_2 \geq j_V) \ (x_{j_1} - x_{j_2} \in V)$$

Nous renvoyons aux livres de Kelley et de Kelley-Namioka, cités dans la bibliographie, pour l'énoncé des principales propriétés de ces filtres .

Nous aurons besoin des résultats suivants :

-46-

Lemme 1 :

Soit E un espace vectoriel muni de deux topologies localement convexes séparées $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$, avec $\mathfrak{T}_1$ plus fine que $\mathfrak{T}_2$.

S'il existe une base de voisinages de O pour $\mathfrak{T}_1$, fermés pour $\mathfrak{T}_2$, alors tout filtre de Cauchy pour $\mathfrak{T}_1$ qui converge pour $\mathfrak{T}_2$, converge pour $\mathfrak{T}_1$ vers la même limite .

Pour les filtres au sens de Moore-Smith, voir Kelley-Namioka chap.2 problème D ; le résultat analogue, pour les filtres au sens de Cartan, est démontré dans Garsoux (cf. Appendice 1 parag.3 th.1) .

Lemme 2 :

Tout espace localement convexe séparé E admet une base de voisinages convexes fermés de O.

Résultat classique, qui provient de ce que tout e.v.t. séparé est régulier (cf. Bourbaki) .

Lemme 3 :

Soient E un e.l.c. séparé, $\sigma(E, E')$ la topologie affaiblie associée . Les ensembles convexes fermés de E pour la topologie initiale, et pour la topologie affaiblie sont les mêmes .

Cf. par exemple Garsoux chap.8 parag.2 th.1 .

Lemme 4 :

Soit E un espace vectoriel muni de deux topologies localement convexes séparées $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$.

Si E admet pour les deux topologies même dual topologique F , les convexes fermés sont les mêmes pour les deux topologies .

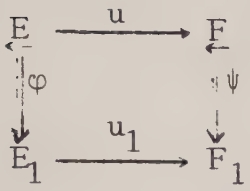
En effet la topologie affaiblie $\sigma(E, F)$ est la même pour les deux topologies ; le lemme 4 est donc une conséquence de la double application du lemme 3 .

*

* -47-

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

* **Theoreme 15 :** SUITE DU DEUXIEME THEOREME DE TRANSFERT D' HOMOMORPHIE .



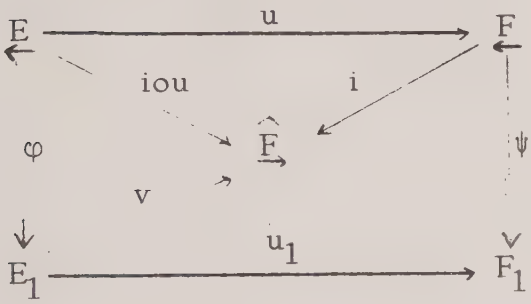
Soient E_1, F_1 deux e.l.c. séparés, et

$\underset{\leftarrow}{E} = \underset{\leftarrow}{\lim}\,(\varphi; E_1)$ $\quad \underset{\leftarrow}{F} = \underset{\leftarrow}{\lim}\,(\psi; F_1)$

deux limites improjectives denses, liées par le diagramme commutatif linéaire ci-contre . Désignons par $\underset{\leftarrow}{u(E)}$ le sous-e.v.t. de $\underset{\leftarrow}{F}$, et $\underset{\rightarrow}{u(E)}$ la limite inductive de E associée à u considéré comme application dans son image .

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que l'homomorphie de u_1 entraîne celle de u (i.e. $\underset{\leftarrow}{u(E)} \approx \underset{\rightarrow}{u(E)}$) est que les deux e.l.c. $\underset{\leftarrow}{u(E)}$ et $\underset{\rightarrow}{u(E)}$ aient même dual topologique .

Comme le théorème ne fait appel qu'à l'image de u, nous pouvons nous ramener , d'après la démonstration générale du théorème 11, à supposer u et u_1 surjectives , ce que nous ferons désormais pour simplifier les notations .



La condition est évidemment nécessaire ; pour démontrer qu'elle est suffisante, il suffit, compte-tenu du théorème 11, de vérifier que si $\underset{\leftarrow}{F} = \underset{\leftarrow}{\lim}\,(\psi; F_1)$ et $\underset{\rightarrow}{F} = \underset{\rightarrow}{\lim}\,(u; \underset{\leftarrow}{E})$ ont même dual topologique, alors la condition faible des noyaux est vérifiée. Rappelons que si v est la factorisée linéaire continue unique de (i o u) par φ, pour $\widehat{\underset{\rightarrow}{F}}$ complété de $\underset{\rightarrow}{F}$, et i injection canonique de F dans $\widehat{\underset{\rightarrow}{F}}$, la condition faible des noyaux s'écrit :

$$\ker u_1 \subset \ker v \quad .$$

-48-

D'après le théorème de transfert projectif de la continuité (th.3), u est continue de $\underset{\leftarrow}{E}$ dans $\underset{\leftarrow}{F}$, et par conséquent la topologie de $\underset{\rightarrow}{F}$ est plus fine que celle de $\underset{\leftarrow}{F}$; comme celle de $\underset{\leftarrow}{F}$ est séparée, celle de $\underset{\rightarrow}{F}$ l'est aussi. D'après le lemme 2, $\underset{\rightarrow}{F}$ admet donc une base de voisinages convexes de O, fermés dans $\underset{\rightarrow}{F}$; si $\underset{\rightarrow}{F}$ et $\underset{\leftarrow}{F}$ ont même dual topologique, il résulte du lemme 4 que ces voisinages convexes sont également fermés dans $\underset{\leftarrow}{F}$. (1)

Soit alors x_o un élément du noyau de u_1. Dire que $\underset{\leftarrow}{E}$ est une limite improjective dense signifie que φ est un homomorphisme injectif, dont l'image $\varphi(E)$ est dense dans E_1. Il existe donc un filtre $(x_j)_{j\in J}$ dans E tel que le filtre image $(\varphi(x_j))_{j\in J}$ converge vers x_o dans E_1 : a fortiori $(\varphi(x_j))_{j\in J}$ est un filtre de Cauchy dans le sous-e.v.t. $\underset{\leftarrow}{\varphi(E)}$, et l'isomorphie de $\underset{\leftarrow}{E}$ et de $\underset{\leftarrow}{\varphi(E)}$ entraîne que $(x_j)_{j\in J}$ est un filtre de Cauchy dans $\underset{\leftarrow}{E}$.

D'autre part, puisque u_1 est linéaire continue, le filtre

$$(u_1 \circ \varphi(x_j))_{j\in J} = (\psi \circ u(x_j))_{j\in J}$$

converge vers $u_1(x_o) = O$ dans F_1, donc dans le sous-e.v.t. $\underset{\leftarrow}{\psi(F)}$: l'isomorphie de $\underset{\leftarrow}{F}$ et de $\underset{\leftarrow}{\psi(F)}$ entraîne alors que le filtre $(u(x_j))_{j\in J}$ converge vers O dans $\underset{\leftarrow}{F}$. Comme de plus, ce filtre, en raison de la continuité de u, est un filtre de Cauchy dans $\underset{\rightarrow}{F}$, il résulte de (1) et du lemme 1 que ce filtre converge vers O dans $\underset{\rightarrow}{F}$.

Par conséquent, le filtre

$$(i \circ u(x_j))_{j\in J} = (v \circ \varphi(x_j))_{j\in J}$$

converge vers O dans $\underset{\rightarrow}{\widehat{F}}$; mais puisque $\varphi(x_j))_{j\in J}$ converge vers x_o dans E_1, et que v est continue, $(v \circ \varphi(x_j))_{j\in J}$ converge aussi vers $v(x_o)$ dans $\underset{\rightarrow}{\widehat{F}}$. Comme le complété d'un espace séparé est séparé, l'unicité de la limite dans $\underset{\rightarrow}{\widehat{F}}$ entraîne donc que x_o appartient au noyau de v, et la condition faible des noyaux est ainsi vérifiée. *

CHAPITRE II :

GENERALISATION AXIOMATIQUE DES ESPACES DE SOBOLEV

Nous définissons dans le premier paragraphe les notions de familles, systèmes et espaces de Sobolev ; nous en donnons un certain nombre d'exemples, classiques ou non, puis démontrons les propriétés qui découlent de l'étude des limites projectives et inductives, et généralisent celles des espaces de Sobolev classiques.

Nous étudions ensuite, dans le second paragraphe, des propriétés liées à la structure des systèmes de Sobolev ; nous introduisons en particulier la notion de diagramme de base associé à un système de Sobolev, et de D - invariance d'une famille de Sobolev, notions essentielles pour l'étude de la dualité, qui sera faite au chapitre suivant .

Les deux derniers paragraphes traitent, plus spécialement de la conservation par les espaces de Sobolev, projectif et inductif , des propriétés topologiques que peuvent vérifier les espaces dont ils sont issus .

* -50- .

II.1 : DEFINITION DES FAMILLES , SYSTEMES ET ESPACES DE SOBOLEV .

A : FAMILLES ET HOMOMORPHISMES DE SOBOLEV .

Definition :

Soient D un e.v.t. localement convexe, et D' son dual topologique, muni d'une topologie de convergence uniforme sur un ensemble filtrant total $\mathfrak{S}$ de bornés de D. Nous appellerons " famille de Sobolev " toute famille Λ d'applications linéaires continues de $D'_{\mathfrak{S}}$ dans lui-même, qui contient l'identité de D' ; et nous dirons que $D'_{\mathfrak{S}}$ est la " base " de Λ.

D'^{Λ} ($\longleftarrow$) et $D'^{(\Lambda)}$ ($\longrightarrow$) désignant respectivement le produit vectoriel et la somme directe topologiques des D' indexés par Λ, considérons les deux applications linéaires :

$$h_\Lambda : \left| \begin{array}{l} D' \longrightarrow D'^{\Lambda} \\ x' \longrightarrow (\lambda(x'))_{\lambda\in\Lambda} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad k_\Lambda : \left| \begin{array}{l} D'^{(\Lambda)} \longrightarrow D' \\ \oplus_\lambda x'_\lambda \longrightarrow \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lambda(x'_\lambda) \end{array} \right.$$

ainsi que les projections canoniques π_λ de D'^{Λ} , et les injections canoniques j_λ de $D'^{(\Lambda)}$ (cf. chap.I paragraphes 1 et 2) ; nous avons, pour tout $\lambda\in\Lambda$, les égalités :

$$\pi_\lambda \circ h_\Lambda = \lambda \quad \text{et} \quad k_\Lambda \circ j_\lambda = \lambda$$

Theoreme 1 : Inversion des applications h_Λ et k_Λ .

Les applications h_Λ et k_Λ définies ci-dessus sont respectivement continûment inversible à gauche, et continûment inversible à droite .

En effet la projection π_{Id} (resp. l'injection j_{Id}) associée à l'identité de D' est linéaire continue par définition de l'e.v.t-produit (resp. somme directe topologique) et $\pi_{Id} \circ h_\Lambda = Id$ (resp. $k_\Lambda \circ j_{Id} = Id$) .

*

* -51-

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théo - rème 12 du chapitre I, d'où l'énoncé équivalent du théorème 1 :

Theoreme 1 bis :

h_Λ est un homomorphisme injectif dont l'image admet un sup - plémentaire topologique dans le produit vectoriel topologique $\underleftarrow{D'^{\Lambda}}$; de même, k_Λ est un homomorphisme surjectif dont le noyau admet un supplémentaire topologique dans la somme directe topologique $\underrightarrow{D'^{\Lambda}}$.

Nous avons vu, au premier chapitre, qu'à toute limite projective (resp. inductive) on pouvait associer une application (cf.chap.I th.4) qui était même un homomorphisme (cf. chap.I th.8 corol.2 et définition consécutive), et que nous avions alors appelée " homomorphisme projectif " (resp. " inductif ") ; en considérant D' comme limite projective (resp. inductive) de lui-même, associée aux $\lambda \in \Lambda$, il résulte du théorème 1 bis le résultat suivant :

Corollaire : Homomorphismes projectif et inductif de Sobolev.

D' est limite projective et inductive de lui-même, associée à la famille de Sobolev Λ, et les homomorphismes projectif et inductif correspondant ne sont autres que les applications h_Λ et k_Λ .

Cela justifie la définition suivante :

Definition :

Nous appellerons " homomorphismes projectif et inductif de Sobolev" , associés à la famille de Sobolev Λ, les applications respectives :

$$h_\Lambda : \left| \begin{array}{l} D' \longrightarrow \underleftarrow{D'^{\Lambda}} \\ x' \longrightarrow (\lambda(x'))_{\lambda \in \Lambda} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad k_\Lambda : \left| \begin{array}{l} \underrightarrow{D'^{(\Lambda)}} \longrightarrow D' \\ \oplus_\lambda x'_\lambda \longrightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda(x'_\lambda) \end{array} \right.$$

-52-

EXEMPLES DE FAMILLES DE SOBOLEV .

Intéressons-nous particulièrement au cas où D' est l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Nous aurons alors des exemples typiques de familles de Sobolev :

(1) Familles de dérivation .

Nous pouvons considérer par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\Lambda_m = \{ D^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n , |\alpha| \leq m \}$

(où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ " ordre " de α)

ou encore l'ensemble $\Lambda_\infty = \{ D^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n \}$;

ces ensembles forment bien des familles de Sobolev puisque la dérivation est un opérateur linéaire continu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et que $D^{(0,0 \ldots 0)} = Id_{\mathcal{D}'(\Omega)}$.

Il n'est évidemment pas nécessaire de prendre toutes les dérivées jusqu'à un certain ordre ; on peut ainsi s'intéresser aux familles $\Delta_m = \{ \Delta^p : p \in \mathbb{N} , p \in \mathbb{N} \}$ et $\Delta_\infty = \{ \Delta^p : p \in \mathbb{N} \}$ où Δ est le laplacien ; plus généralement nous pouvons considérer comme famille de Sobolev toute partie (finie ou non) contenant l'identité, de l'espace $\mathbb{C}[D]$ des polynomes de dérivation à coefficients constants .

(2) Familles d'homothétie .

Puisque pour toute fonction $a \in \mathcal{E}(\Omega)$ espace des fonctions indéfiniment différentiables à valeurs complexes, l'homothétie associée

$$\tilde{a} : \begin{cases} \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}' \\ x' \longrightarrow a x' \end{cases}$$

est un opérateur linéaire continu, à toute partie A de $\mathcal{E}(\Omega)$ contenant la fonction constante 1, correspond une famille de Sobolev

$$\tilde{\Lambda}_A = \{ \tilde{a} : a \in A \}$$

De plus, en combinant les familles de dérivation et d'homothétie, nous pouvons associer une famille de Sobolev à toute partie A, contenant la fonction constante 1, du module $\mathcal{E}(\Omega)[D]$ des polynomes de dérivation à coefficients dans $\mathcal{E}(\Omega)$. Nous nous intéresserons à deux types particuliers de familles :

- pour une fonction $\rho \in \mathcal{E}(\Omega)$ donné, et $m \in \mathbb{N}$,

$\Lambda_{\rho,m} = \{\rho^{|\alpha|} D^\alpha : |\alpha| \leq m\}$ et $\Lambda_{\rho,-m} = \{[x' \to D^\alpha(\rho^{|\alpha|} x')] : |\alpha| \leq m\}$

- en prenant l'ensemble des polynomes de dérivation ayant pour coefficients les fonctions polynomiales $x^\alpha : x \to x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$,

où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$; par exemple

$\Lambda_{x,\infty} = \{x^\alpha D^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ et $\Lambda_{x,-\infty} = \{[x' \to D^\beta(x^\alpha . x')] : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$

(3) Familles de convolution .

Puisque le produit de convolution de toute distribution par une distribution à support compact a', est encore une distribution (cf. Schwartz . chap. 6) et que l'opération ainsi définie est linéaire continue, à toute partie A' de l'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$ des distributions à support compact, et qui contient la mesure de Dirac à l'origine $\delta_{(O,O,\ldots,O)}$, on peut associer la famille de Sobolev :

$$\Lambda_{A'} = \{(x' \to a' * x') : a' \in A'\}$$

que l'on peut à son tour combiner avec les familles précédentes .

Nous pouvons aussi considérer d'autres cadres d'étude que l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: par exemple $S'(\mathbb{R}^n)$ espace des distributions tempérées (cf. Schwartz chap.7) (où l'on peut considérer des opérateurs faisant intervenir la transformation de Fourier) ; ou encore $\mathcal{A}'(\Omega)$ espace des fonctionnelles analytiques, ou $\mathbb{C}[[X_1 \ldots X_n]]$ espace des séries entières à n indéterminées (cf. Trèves chap. 22) .

Il serait intéressant aussi de choisir l'espace des distributions sur un groupe localement compact (cf. Bruhat) qui ont des applications à l'étude des groupes p-adique , et des espaces de suites .

* -54-

B : SYSTEMES ET ESPACES DE SOBOLEV .

Considérons une famille d' e.v.t. localement convexes E_λ , inclus topologiquement dans D' par l'intermédiaire des injections continues respectives i_λ . Pour simplifier les notations, nous considérerons chaque E_λ comme un sous-espace vectoriel de D', muni d'une topologie plus fine que celle induite par D' .

Tous les E_λ sont des e.l.c. séparés, puisque leur structure d' e.l.c. est plus fine que celle induite par la structure d' e.l.c. séparé de D' . D'autre part, nous avons les inclusions vectorielles topologiques :

$$\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda} < \underleftarrow{D'^{\Lambda}} \quad \text{et} \quad \underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda} < \underrightarrow{D'^{(\Lambda)}}$$

en raison du corollaire 2 des théorèmes 3 et 3 bis du chapitre I ; ceci nous permettra de considérer les deux e.l.c. $\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}$ et $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$ comme des sous-espaces vectoriels respectifs de $\underleftarrow{D'^{\Lambda}}$ et de $\underrightarrow{D'^{(\Lambda)}}$. munis de structures propres d' e.l.c. , plus fines que les structures induites, pour les injections canoniques : $\Pi_\lambda i_\lambda$ et $\oplus_\lambda i_\lambda$. Ces deux espaces sont donc eux aussi séparés ; ils sont complets si les E_λ le sont .

Definition :

nous appellerons " système de Sobolev " $\Sigma(\Lambda)$. la donnée d'une famille de Sobolev Λ, des deux homomorphismes associés h_Λ et k_Λ, et d'une famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, indexée par Λ, d'espaces localement convexes inclus topologiquement dans D' ; soit :

$$\Sigma(\Lambda) = (\Lambda , h_\Lambda , k_\Lambda , (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$$

Considérons l'espace vectoriel, noté $H(\Lambda ; E_\lambda)$, image réciproque dans D' du produit des E_λ , par l'homomorphisme projectif de Sobolev Λ ; de façon équivalente :

$$H(\Lambda ; E_\lambda) = h_\Lambda^{-1} (\Pi_\lambda E_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \lambda^{-1} (E_\lambda) .$$

* - 55

Considérons aussi les applications suivantes :

$\tilde{\pi}_\lambda$: projection canonique de $\Pi_\lambda E_\lambda$ dans E_λ ;

$\tilde{h}_\Lambda$: restriction de h_Λ à $H(\Lambda ; E_\lambda)$, considérée comme application à valeurs dans $\Pi_\lambda E_\lambda$; et pour tout $\lambda \in \Lambda$:

λ_H : restriction de λ à $H(\Lambda ; E_\lambda)$, considérée à valeurs dans E_λ.

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, nous avons la relation : $\tilde{\pi}_\lambda \circ \tilde{h}_\Lambda = \lambda_H$.

Definition :

nous appellerons " espace projectif de Sobolev " associé à un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$, l'e.v.t. localement convexe $\varprojlim H(\Lambda ; E_\lambda)$, limite projective des E_λ associée à $\{\lambda_H : \lambda \in \Lambda\}$.

Puisque $\tilde{h}_\Lambda$ est l'application associée à cette limite projective (cf. chap.I th.4) nous aurons :

$$\varprojlim H(\Lambda ; E_\lambda) = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} (\lambda_H ; E_\lambda) = \varprojlim (\tilde{h}_\Lambda ; \Pi_\lambda E_\lambda) ;$$

puisque $\tilde{h}_\Lambda$ est un homomorphisme (cf. chap.I th.8 corol.2), nous l'appellerons " homomorphisme (projectif) associé à l'espace projectif de Sobolev " .

Puisque h_Λ est injectif, $\tilde{h}_\Lambda$ le sera aussi, et donc l'espace projectif de Sobolev $\varprojlim H(\Lambda ; E_\lambda)$ est une limite improjective (cf. chap.I, définition suivant le corollaire 2 du théorème 8) .

De même, considérons l'espace vectoriel $K(\Lambda ; E_\lambda)$ image dans D' de la somme directe $\oplus_\lambda E_\lambda$ par l'homomorphisme inductif de Sobolev k_Λ ; c'est aussi l'espace vectoriel engendré par les $\lambda(E_\lambda)$, soit :

$$K(\Lambda ; E_\lambda) = k_\Lambda(\oplus_\lambda E_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda(E_\lambda) \quad .$$

* -56

Considérons aussi les applications suivantes :

$\tilde{j}_\lambda$: injection canonique de E_λ dans $\oplus_\lambda E_\lambda$;

$\tilde{k}_\Lambda$: restriction de k_Λ à $\oplus_\lambda E_\lambda$, considérée à valeurs dans $K(\Lambda ; E_\lambda)$:

λ_K : restriction de λ à E_λ, considérée à valeurs dans $K(\Lambda ; E_\lambda)$;

pour tout $\lambda \in \Lambda$, nous avons la relation : $\tilde{k}_\Lambda \circ \tilde{j}_\lambda = \lambda_K$.

Definition :

nous appellerons " espace inductif de Sobolev " associé à un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$, l'espace localement convexe $\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda)$ limite inductive des E_λ associée à $\{\lambda_K ; \lambda \in \Lambda\}$.

Puisque $\tilde{k}_\Lambda$ est l'application associée à cette limite inductive, (cf. mêmes références que pour la définition précédente), nous aurons :

$$\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda) = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} (\lambda_K ; E_\lambda) = \varinjlim (\tilde{k}_\Lambda ; \varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda) ;$$

puisque $\tilde{k}_\Lambda$ est un homomorphisme, nous l'appellerons " homomorphisme (inductif) associé à l'espace inductif de Sobolev " .

Puisque $\tilde{k}_\Lambda$ est surjectif par définition de $K(\Lambda ; E_\lambda)$, l'espace inductif de Sobolev $\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda)$ est une limite surinductive (cf. mêmes références) .

Le théorème suivant " situe " les espaces de Sobolev par rapport à D', et en donne les premières propriétés topologiques :

* -57-

* **Theoreme 2 :** COMPARAISON DES ESPACES DE SOBOLEV AU PRODUIT ET A LA SOMME DIRECTE TOPOLOGIQUE .

Les deux espaces de Sobolev sont inclus topologiquement dans D' ; ils sont en particulier séparés .

De plus, l'espace projectif $\varprojlim H(\Lambda ; E_\lambda)$ est isomorphe au sous-e.v.t. $\varprojlim h_\Lambda(H)$ de $\varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda$, et l'espace inductif $\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda)$ est isomorphe à l' e.v.t.-quotient $\left(\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda \Big/ \ker \tilde{k}_\Lambda \right)$.

Nous avons en effet les diagrammes vectoriels topologiques :

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim H(\Lambda;E_\lambda) & \xrightarrow{i_H} & D' \\ \downarrow \lambda_H & & \downarrow \lambda \\ E_\lambda & \xrightarrow{i_\lambda} & D' \\ \downarrow \lambda_K & & \downarrow \lambda \\ \varinjlim K(\Lambda;E_\lambda) & \xrightarrow{i_K} & D' \end{array}$$

puisque $D' = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} (\lambda ; D') = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} (\lambda ; D')$ d'après le corollaire du théorème 1 bis ; par conséquent la continuité des i_λ entraîne celle des injections i_H et i_K (cf. chap.I th.3 et 3 bis) ; la séparation résulte de celle de D' .

La deuxième assertion résulte de ce que $\varprojlim H(\Lambda ; E_\lambda)$ (resp. $\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda)$) est une limite improjective (resp. surinductive), ce qui permet d'appliquer le corollaire 3 du théorème 8 du chapitre I .

*

-58-

EXEMPLES D'ESPACES DE SOBOLEV PROJECTIFS ET INDUCTIFS .

Nous les choisirons en corrélation avec les familles de Sobolev déjà citées au premier paragraphe ; pour cela, nous nous plaçons toujours dans le cadre des distributions .

1°) Espaces associés à des familles de dérivation .

Nous nous limiterons aux familles de Sobolev Λ_m et Λ_∞ :

(a) Considérons le système de Sobolev

$$\Sigma_p(\Lambda_m) = (\Lambda_m, h_m, k_m, (L^p(\Omega))_{\lambda\in\Lambda_m})$$

les espaces de Sobolev projectif et inductif associés $\overleftarrow{H(\Lambda_m ; L^p(\Omega))}$ et $\overrightarrow{K(\Lambda_m, L^p(\Omega))}$ ne sont autres que les espaces de Sobolev classiques $H^{p,m}(\Omega)$ et $H^{p,(-m)}(\Omega)$ (encore notés $W_p^{(m)}(\Omega)$ et $W_p^{(-m)}(\Omega)$) :

$$H^{p,m}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : (\forall |\alpha| \le m)\ (D^\alpha f \in L^p(\Omega))\}$$

et $$H^{p,(-m)}(\Omega) = \{\sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha f_\alpha : (\forall |\alpha| \le m)(f_\alpha \in L^p(\Omega))\}$$

(cf. Trèves chap. 31, ou Nečas chap.2) .

Leur coïncidence topologique sera vérifiée aux paragraphes 3 et 4.

Si nous remplaçons $L^p(\Omega)$ par $L^p(\Omega ; \mu)$ espace des classes de fonctions p-intégrables pour une mesure positive μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue μ_o, en vertu du théorème de Radon - Nikodym, il existe une fonction positive σ, intégrable au sens de Lebesgue, telle que $\mu = \sigma\mu_o$; les espaces de Sobolev projectifs $H(\Lambda_m ; L^p(\Omega;\mu))$ ne sont autres dans ce cas que les espaces de Sobolev avec poids (cf. Nečas chap.6) :

$$W_\sigma^{p,m}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega;\mu) : (\forall |\alpha| \le m)(D^\alpha f \in L^p(\Omega;\mu))\}$$

$$= \{f \in L^p(\Omega;\mu) : (\forall |\alpha| \le m)\ (\int_\Omega \sigma |D^\alpha f|^p\, dx < \infty)\}$$

on peut aussi considérer les espaces inductifs :

$$W_\sigma^{p,-m}(\Omega) = \{\sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha f_\alpha : (\forall |\alpha| \le m)\ (f_\alpha \in L^p(\Omega;\mu))\}$$

-59 -

(b) Si nous considérons la famille de Sobolev Λ_∞ et le système de Sobolev associé qui fait intervenir $L^p(\Omega)$, alors l'espace de Sobolev projectif $H(\Lambda_\infty ; L^p(\Omega))$ n'est autre que l'espace $\mathfrak{D}_{L^p}$ de Schwartz et $K(\Lambda_\infty ; L^p(\Omega)$ son dual topologique $\mathfrak{D}'_{L^p}$ (cf. Schwartz . chap. 6).

(c) Si au lieu de $L^p(\Omega)$, nous considérons l'espace $\mathfrak{D}^o_K(\Omega) = \mathfrak{C}_K(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω à support dans le compact $K \subset \Omega$ (resp. $\mathfrak{C}^o(\Omega) = \mathfrak{C}(\Omega)$ espace des fonctions continues sur Ω), nous avons alors les espaces de Sobolev projectifs :

$$\varprojlim H(\Lambda_m ; \mathfrak{C}_K(\Omega)) = \mathfrak{D}^m_K(\Omega)$$

espace des fonctions $\mathfrak{C}^m$- différentiables sur Ω à support dans K

$$\varprojlim H(\Lambda_\infty ; \mathfrak{C}_K(\Omega)) = \mathfrak{D}_K(\Omega)$$

espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support dans K

(resp. $\varprojlim H(\Lambda_m ; \mathfrak{C}(\Omega)) = \mathfrak{E}^m(\Omega)$

espace des fonctions $\mathfrak{C}^m$- différentiables sur Ω

et $\varprojlim H(\Lambda_\infty ; \mathfrak{C}(\Omega)) = \mathfrak{E}(\Omega)$

espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω .

Les espaces inductifs respectifs sont les duals topologiques de ces espaces (cf. Schwartz chap.3, et Trèves chap. 24) .

(d) Nous obtiendrons des espaces de Sobolev sur les espaces d'Orlicz (cf. Krasnoselski - Rutickii) ou même plus généralement sur les treillis localement convexes normaux (cf. Robert), permettant d'étudier certains types d'équations aux dérivées partielles, en particulier certaines équations quasi-linéaires de Višik (cf. Leray - Lions) pour lesquelles la recherche des solutions oblige à sortir des espaces de Sobolev classiques.

-60-

2°) Espaces associés à des familles d'homothétie - dérivation .

(a) Considérons les familles $\Lambda_{\rho,m}$ et $\Lambda_{\rho,-m}$ déjà définies, où ρ est une fonction positive (à valeurs complexes) indéfiniment différentiable sur Ω, se prolongeant à la fermeture $\overline{\Omega}$ de Ω en une fonction $\overline{\rho} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et s'annulant sur le bord $\partial\Omega$ avec le même ordre que la distance $d(x, \partial\Omega)$ (cf. Lions-Magénès chap.2, parag.6) .

Alors les espaces de Sobolev projectif et inductif

$H(\Lambda_{\rho,m} ; L^p(\Omega))$ et $K(\Lambda_{\rho,-m} ; L^p(\Omega))$,

ne sont autres que les espaces respectifs

$$\Xi_\rho^{p,m}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) : \forall\, |\alpha| \le m,\ \rho^{|\alpha|} D^\alpha f \in L^p(\Omega) \}$$

et $$\Xi_\rho^{p,-m}(\Omega) = \{ \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha(\rho^{|\alpha|} f_\alpha) : \forall\, |\alpha| \le m,\ f_\alpha \in L^p(\Omega) \}$$

utilisés en théorie des opérateurs elliptiques (cf. mêmes références) .

(b) Considérons la famille de Sobolev

$$\Lambda_{x,\infty} = \{ x^\alpha D^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \}$$

et l'espace $\mathcal{C}_o(\mathbb{R}^n)$ des fonctions numériques continues convergeant vers O à l'infini (i.e. $\lim_{||x|| \to \infty} |f(x)| = 0$) et muni de la norme de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^n$.

Alors l'espace projectif de Sobolev $H(\Lambda_{x,\infty} , \mathcal{C}_o(\mathbb{R}^n))$ n'est autre que l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide (cf. Schwartz chap.7) ; la coïncidence topologique résultera du paragraphe 3 .

3°) Espaces associés à des familles de convolution .

Si A' est une partie de $\mathcal{E}'(\Omega)$ contenant $\delta_{(0,\dots,0)}$, et si les E_λ sont des espaces de distributions,

$$H(\Lambda ; E_\lambda) = \{ x' \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall\, a' \in A',\ a' * x' \in E_\lambda \} ;$$

on aboutit ainsi à des espaces de solutions de familles d'equations de convolutions.

-61-

II.2 : PROPRIETES STRUCTURALES DES SYSTEMES DE SOBOLEV .

A : SOUS-FAMILLE ET SOUS-SYSTEME DE SOBOLEV .

Definition : Sous-famille de Sobolev .

On appellera ainsi toute partie $\mathfrak{M}$ d'une famille de Sobolev Λ, qui contient l'identité de D' .

Definition : Sous-système de Sobolev .

Soient $\Sigma(\Lambda) = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ un système de Sobolev de base D', et d'espaces projectif et inductif associés $H(\Lambda)$ et $K(\Lambda)$, $\mathfrak{M}$ une sous-famille de Sobolev de Λ, $h_{\mathfrak{M}}$ et $k_{\mathfrak{M}}$ les homomorphismes projectif et inductif associés ; on appellera " sous-système de Sobolev de $\Sigma(\Lambda)$, associé à la sous-famille $\mathfrak{M}$ " le système de Sobolev $\Sigma(\mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}, h_{\mathfrak{M}}, k_{\mathfrak{M}}, (E_\lambda)_{\lambda\in\mathfrak{M}})$.

Nous pouvons appliquer le corollaire 1 du th.12 du chapitre I, à la famille $(D')_{\lambda\in\Lambda}$ (resp. $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$) ; nous noterons $i_{\mathfrak{M}}, j_{\mathfrak{M}}, \pi_{\mathfrak{M}}, \rho_{\mathfrak{M}}$ (resp. $\tilde{i}_{\mathfrak{M}}, \tilde{j}_{\mathfrak{M}}, \tilde{\pi}_{\mathfrak{M}}, \tilde{\rho}_{\mathfrak{M}}$) les applications respectives définies dans ce corollaire. Les homomorphismes projectifs et inductifs associés aux familles de Sobolev respectives Λ et $\mathfrak{M}$ sont liés par les égalités :

$$h_{\mathfrak{M}} = \pi_{\mathfrak{M}} \circ h_\Lambda \qquad k_{\mathfrak{M}} = k_\Lambda \circ j_{\mathfrak{M}}$$

examinons maintenant comment sont liés les espaces de Sobolev associés aux systèmes respectifs, et leurs homomorphismes correspondants :

Theoreme 3 : Comparaison des espaces associés à un sous-système de Sobolev .

Si $\mathfrak{M}$ est une sous-famille de Sobolev d'une famille de Sobolev Λ, et $\Sigma(\mathfrak{M})$ le sous-système d'un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ associé à Λ, les espaces projectif et inductif respectifs vérifient les inclusions vectorielles topologiques :

$$\underleftarrow{H(\Lambda)} < \underleftarrow{H(\mathfrak{M})} \quad \text{et} \quad \underrightarrow{K(\mathfrak{M})} < \underrightarrow{K(\Lambda)} \quad .$$

De plus, l'homomorphisme projectif associé $\tilde{h}_{\mathfrak{M}}$ a pour restriction à $H(\Lambda)$ l'application $\tilde{\pi}_{\mathfrak{M}} \circ \tilde{h}_{\Lambda}$, et l'homomorphisme inductif associé $\tilde{k}_{\mathfrak{M}}$ est l'application $\tilde{k}_{\Lambda} \circ \tilde{j}_{\mathfrak{M}}$, considérée à valeurs dans $K(\mathfrak{M})$.

Autre énoncé équivalent :

Theoreme 3 bis :

Si $\mathfrak{M}$ est une sous-famille de Sobolev d'une famille de Sobolev Λ, et $\Sigma(\mathfrak{M})$ le sous-système associé à un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$, les espaces projectifs et inductifs respectifs vérifient les inclusions (algébriques) :

$$H(\Lambda) \subset H(\mathfrak{M}) \quad \text{et} \quad K(\mathfrak{M}) \subset K(\Lambda) \ .$$

De plus, si π et j sont les injections canoniques respectives, nous avons les diagrammes commutatifs vectoriels-topologiques suivants :

$$\begin{array}{ccc} \underleftarrow{H(\Lambda)} & \xrightarrow{\pi} & \underleftarrow{H(\mathfrak{M})} \\ \downarrow \tilde{h}_{\Lambda} & & \downarrow \tilde{h}_{\mathfrak{M}} \\ \underleftarrow{\prod_{\lambda\in\Lambda} E_{\lambda}} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_{\mathfrak{M}}} & \underleftarrow{\prod_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_{\lambda}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \underrightarrow{K(\mathfrak{M})} & \xrightarrow{j} & \underrightarrow{K(\Lambda)} \\ \uparrow \tilde{k}_{\mathfrak{M}} & & \uparrow \tilde{k}_{\Lambda} \\ \underrightarrow{\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_{\lambda}} & \xrightarrow{\tilde{j}_{\mathfrak{M}}} & \underrightarrow{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_{\lambda}} \end{array}$$

Les inclusions algébriques résultent de la définition même des espaces de Sobolev, puisque algébriquement

$$H(\Lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \lambda^{-1}(E_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in\mathfrak{M}} \lambda^{-1}(E_\lambda) = H(\mathfrak{M})$$

et $$K(\mathfrak{M}) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{M}} \lambda(E_\lambda) \subset \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(E_\lambda) = K(\Lambda)$$

La commutativité et la linéarité des diagrammes se vérifient immédiatement. La continuité des injections π et j résulte des théorèmes de transfert de la continuité (cf. chap.I parag.1 th.3 et parag.2 th.3 bis) .

* Corollaire :

Les espaces projectif et inductif associés à un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ vérifient les inclusions vectorielles topologiques

$$\underleftarrow{H(\Lambda)} < E_{Id} \qquad \text{et} \qquad E_{Id} < \underrightarrow{K(\Lambda)}$$

Remarque importante sur le transfert des homomorphismes .

Puisque $\tilde{\pi}_{\mathfrak{M}}$ et $\tilde{j}_{\mathfrak{M}}$ sont des homomorphismes, on serait tenté de penser que π et j en sont aussi, bien que les situations considérées ne relèvent pas des théorèmes de transfert démontrés au chapitre I. Or il n'en est rien, car cela signifierait en particulier que $H(\Lambda)$ est sous-e.v.t. de E_{Id}, ce qui est faux dans le cas des espaces de Sobolev classiques : $H^{1,1}(\Omega)$ est strictement plus fin que l'espace induit par $L^1(\Omega)$ (il suffit de comparer les normes respectives) .

* -64-

B : INCLUSION VECTORIELLE TOPOLOGIQUE DES SYSTEMES DE SOBOLEV ASSOCIES A UNE MEME FAMILLE .

Definition :

Soient Λ une famille de Sobolev de base D', et $\Sigma_1(\Lambda) = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (E_{1,\lambda})_{\lambda\in\Lambda})$ et $\Sigma_2(\Lambda) = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (E_{2,\lambda})_{\lambda\in\Lambda})$ deux systèmes associés à la famille Λ . On dira que l'on a " l'inclusion vectorielle topologique des deux systèmes " : $\Sigma_1(\Lambda) \prec \Sigma_2(\Lambda)$ si pour tout $\lambda\in\Lambda$, on a l'inclusion vectorielle topologique :

$$E_{1,\lambda} \prec E_{2,\lambda} .$$

Conséquence immédiate :

tout système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ est inclus vectoriellement et topologiquement dans le " système de base " $\Sigma'_o = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (D')_{\lambda\in\Lambda})$.

Le résultat suivant motive la définition précédente :

Theoreme 4 : CONSERVATION DE L'INCLUSION VECTORIELLE TOPOLOGIQUE .

L'inclusion vectorielle topologique de deux systèmes de Sobolev associés à une même famille Λ entraîne celle des espaces projectifs et inductifs associés, soit, avec les notations de la définition :

$$\Sigma_1(\Lambda) \prec \Sigma_2(\Lambda) \Rightarrow \begin{array}{l} \overleftarrow{H(\Lambda;E_{1,\lambda})} \prec \overleftarrow{H(\Lambda;E_{2,\lambda})} \\ \overrightarrow{K(\Lambda;E_{1,\lambda})} \prec \overrightarrow{K(\Lambda;E_{2,\lambda})} \end{array}$$

Considérons E_λ comme sous-espace vectoriel de F_λ, muni d'une topologie propre. Dans ces conditions, les inclusions algébriques :

$$\lambda^{-1}(E_{1,\lambda}) \subset \lambda^{-1}(E_{2,\lambda}) \quad \text{et} \quad \lambda(E_{1,\lambda}) \subset \lambda(E_{2,\lambda})$$

entraînent

$$H(\Lambda;E_{1,\lambda}) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \lambda^{-1}(E_{1,\lambda}) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \lambda^{-1}(E_{2,\lambda}) = H(\Lambda;E_{2,\lambda})$$

et

$$K(\Lambda;E_{1,\lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(E_{1,\lambda}) \subset \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(E_{2,\lambda}) = K(\Lambda;E_{2,\lambda})$$

Notons alors φ_λ (resp. φ_H, φ_K) l'injection canonique de $E_{1,\lambda}$ (resp. $H(\Lambda;E_{1,\lambda})$, $K(\Lambda;E_{1,\lambda})$) dans $E_{2,\lambda}$ (resp. $H(\Lambda\ E_{2,\lambda}\ )$, $K(\Lambda;E_{2,\lambda})$), et $\tilde{h}_{1,\Lambda}$, $\tilde{k}_{1,\Lambda}$ (resp. $\tilde{h}_{2,\Lambda}$, $\tilde{k}_{2,\Lambda}$) les homomorphismes associés aux espaces $H(\Lambda;E_{1,\lambda})$ et $K(\Lambda;E_{1,\lambda})$ (resp. $H(\Lambda;E_{2,\lambda})$ et $K(\Lambda;E_{2,\lambda})$) .

Nous avons alors les diagrammes commutatifs linéaires suivants :

$$\begin{array}{ccc} H(\Lambda;E_{1,\lambda}) & \xrightarrow{\varphi_H} & H(\Lambda;E_{2,\lambda}) \\ \downarrow \tilde{h}_{1,\Lambda} & & \downarrow \tilde{h}_{2,\Lambda} \\ \Pi_\lambda E_{1,\lambda} & \xrightarrow{\Pi_\lambda \varphi_\lambda} & \Pi_\lambda E_{2,\lambda} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K(\Lambda;E_{1,\lambda}) & \xrightarrow{\varphi_K} & K(\Lambda;E_{2,\lambda}) \\ \downarrow \tilde{k}_{1,\Lambda} & & \uparrow \tilde{k}_{2,\Lambda} \\ \oplus_\lambda E_{2,\lambda} & \xrightarrow{\oplus_\lambda \varphi_\lambda} & \oplus_\lambda E_{2,\lambda} \end{array}$$

Il suffit donc de montrer qu'ils sont vectoriels-topologiques : or $\Pi_\lambda\varphi_\lambda$ (resp. $\oplus_\lambda\varphi_\lambda$) est une injection continue (cf. chap.I parag. 1 th.3 coroll.2 resp. parag.2 th. 3 bis coroll.2) et le théorème de transfert de la continuité (chap.I th.3, resp. 3 bis) entraîne la continuité de φ_H (resp. φ_K) . *

Remarque :

En comparant tout système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ au système $\Sigma'_o(\Lambda)$, on retrouve le fait que $H(\Lambda;E_\lambda)$ et $K(\Lambda;E_\lambda)$ sont inclus topologiquement dans D' .

* - 66 -

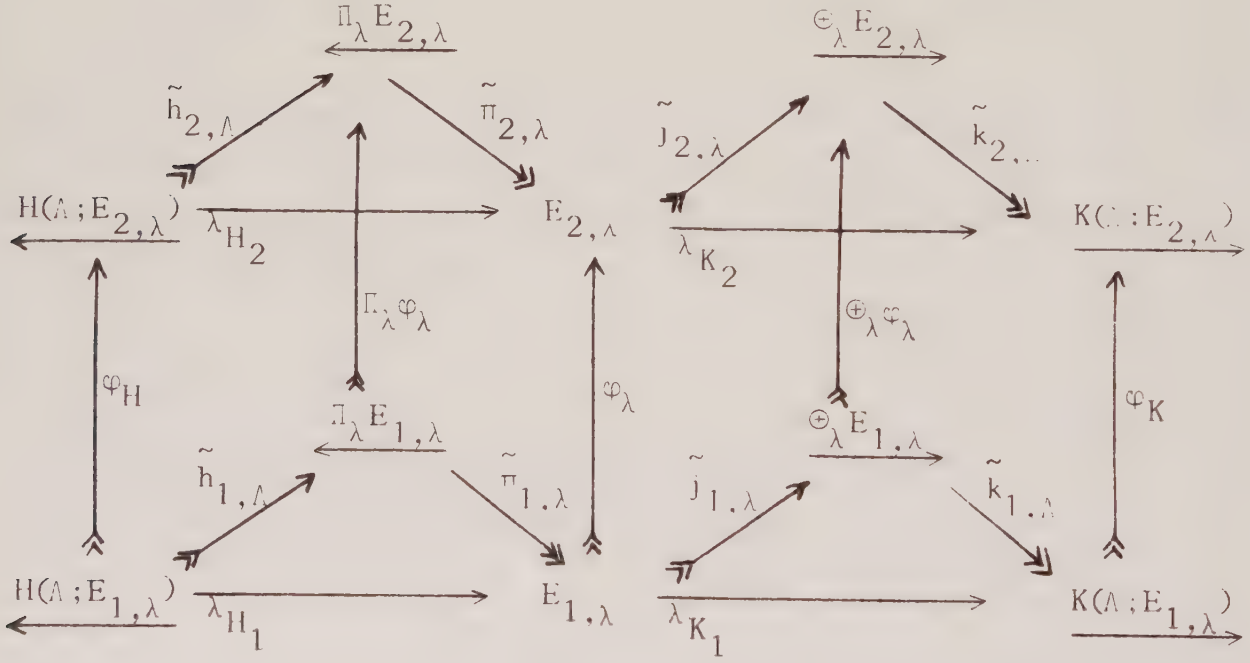
C : DIAGRAMME FONCTIONNEL ASSOCIE A UNE INCLUSION VECTORIELLE TOPOLOGIQUE DE SYSTEMES DE SOBOLEV. DIAGRAMME DE BASE ASSOCIE A UN SYSTEME DE SOBOLEV.

Definition :

Nous appellerons " diagramme associé à une inclusion vectorielle topologique de systèmes de Sobolev " (sur une même famille Λ) :

$$\Sigma_1(\Lambda) = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (E_{1,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}) \prec \Sigma_2(\Lambda) = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (E_{2,\lambda})_{\lambda\in\Lambda})$$

le diagramme vectoriel-topologique suivant, où $\rightarrowtail$ (resp. $\twoheadrightarrow$) désigne les applications injectives (resp. surjectives) :



Ce diagramme résume la propriété de conservation de l'inclusion vectorielle-topologique ; de plus, les diagrammes d'inclusion s'emboîtent les uns dans les autres, car à la transitivité de l'inclusion correspond l'associativité des diagrammes, ce qui définit une opération de composition de ces diagrammes .

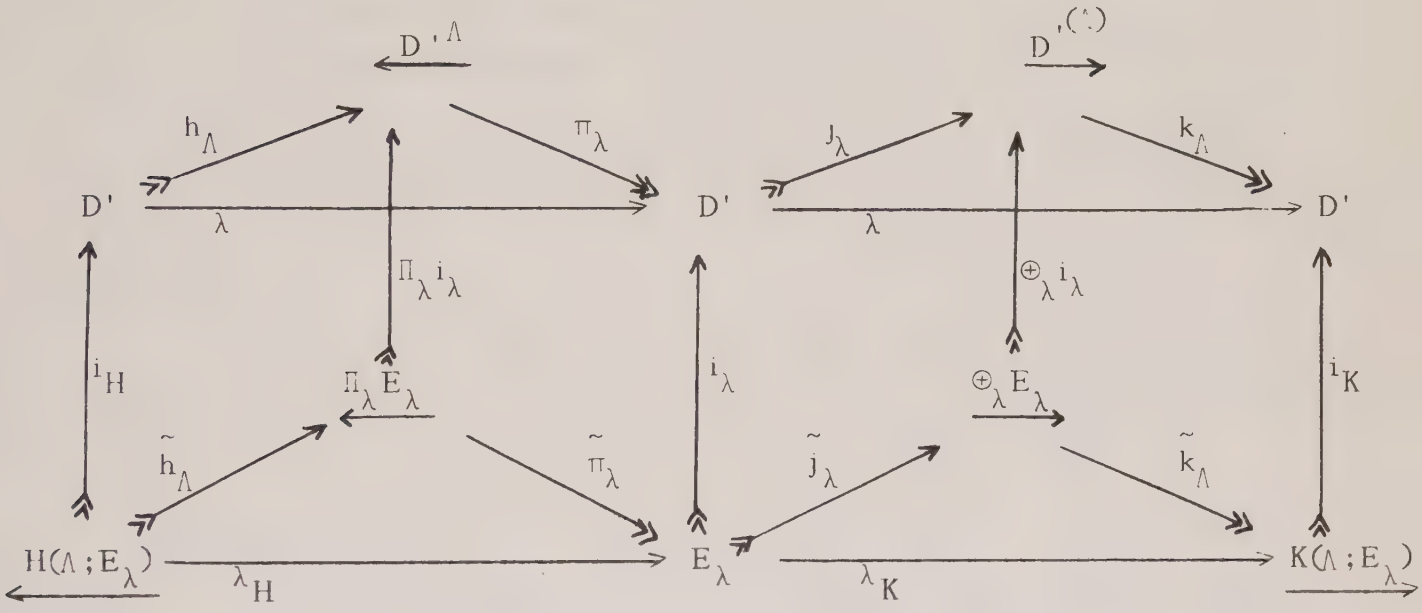
* -67-

si Δ_{12} et Δ_{23} désignent les diagrammes respectifs associés aux inclusions $\Sigma_1(\Lambda) < \Sigma_2(\Lambda)$ et $\Sigma_2(\Lambda) < \Sigma_3(\Lambda)$, à l'inclusion $\Sigma_1(\Lambda) < \Sigma_3(\Lambda)$ correspond le diagramme $\Delta_{13} = \Delta_{23} \circ \Delta_{12}$.

Definition :

Nous appellerons " diagramme de base, associé à un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ " le diagramme d'inclusion de $\Sigma(\Lambda)$ dans le système de base : $\Sigma'_o(\Lambda)$ (cf. définition au sous-paragraphe précédent) .

C'est donc le diagramme Δ'_o :



Quand nous nous intéresserons plus spécialement à l'un des espaces projectif et inductif associés à $\Sigma(\Lambda)$, nous n'aurons alors besoin que d'un demi-diagramme ; aussi les appellerons-nous respectivement " diagramme projectif de base " et " diagramme inductif de base " .

On vérifie immédiatement que le composé d'un diagramme d'inclusion avec le diagramme de base du système d'arrivée est le diagramme de base du système de départ :

$$\Delta_{1o} = \Delta_{2o} \circ \Delta_{12}$$

D : INVARIANCE VECTORIELLE TOPOLOGIQUE D'UN SYSTEME DE SOBOLEV .

D'après le corollaire du théorème 3, nous savons que pour tout système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$, nous avons les inclusions vectorielles topologiques :

$$\underleftarrow{H(\Lambda)} < E_{Id} < \underrightarrow{K(\Lambda)} \quad .$$

Le problème qui nous intéresse ici est de savoir sous quelles conditions E_{Id} coïncide algébriquement ou topologiquement avec l'un des deux espaces de Sobolev . Les notations utilisées sont celles du paragraphe I.B.

Theoreme 5 : Invariance algébrique d'un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$.

Nous avons les équivalences suivantes $(p_1) \Leftrightarrow (p_1') \Rightarrow (p_2')$ et $(i_1) \Leftrightarrow (i_1') \Rightarrow (i_1'')$:

(p_1)	$H(\Lambda) = E_{Id}$	
(p_1')	$(\forall \lambda \in \Lambda)\ (\lambda(E_{Id}) \subset E_\lambda)$	invariance projective
(p_1'')	$\operatorname{Im} \tilde{\pi}_{Id} = H(\Lambda)$	
(i_1)	$K(\Lambda) = E_{Id}$	
(i_1')	$(\forall \lambda \in \Lambda)\ (\lambda(E_\lambda) \subset E_{Id})$	invariance inductive
(i_1'')	$\operatorname{Im} \tilde{j}_{Id} = K(\Lambda)$	

Les équivalences $(p_1) \Leftrightarrow (p_1'')$ et $(i_1) \Leftrightarrow (i_1'')$ sont triviales, puisque
$\operatorname{Im} \tilde{\pi}_{Id} = E_{Id}$ et $\operatorname{Im} \tilde{j}_{Id} = E_{Id} \oplus \{0\}^{(\Lambda - Id)}$ algébriquement isomorphe à E_{Id} .

Nous avons d'autre part les implications $(p_1) \Rightarrow (p_1')$ et $(i_1) \Rightarrow (i_1')$, puisque par définition des espaces de Sobolev, nous avons, pour tout $\lambda \in \Lambda$, les inclusions algébriques

$$\lambda(H(\Lambda)) \subset E_\lambda \quad \text{et} \quad \lambda(E_\lambda) \subset K(\Lambda) \ ;$$

* -69-

inversement, puisque l'on a toujours $H(\Lambda) \subset E_{Id} \subset K(\Lambda)$, si (p'_1) (resp. (i'_1)) est vérifiée, on a les inclusions algébriques :

$$E_{Id} \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \lambda^{-1}(\lambda(E_{Id})) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \lambda^{-1}(E_\lambda) = H(\Lambda)$$

$$(\text{resp. } K(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda(E_\lambda) \subset E_{Id}) \ ;$$

Les inclusions inverses résultent du corollaire du théorème 3 bis .

*

Definitions :

Nous dirons qu'un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ est , " du point de vue algébrique, " projectivement invariant " (resp. " inductivement invariant ") si les conditions (p_1) (resp. (i_1)) sont vérifiées.

Nous dirons qu'il est " algébriquement invariant " si les deux séries de conditions le sont .

* Corollaire :

Soit $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev dont tous les E_λ sont un même e.l.c. E . Il est algébriquement invariant si et seulement si E est stable par la famille de Sobolev Λ , i.e. si l'on a la relation :

$$(\forall \lambda \in \Lambda) \quad (\lambda(E) \subset E)$$

Ceci résulte de ce que les conditions (p'_1) et (i'_1) se réduisent à la condition de stabilité énoncée . *

-70-

Theoreme 6 : Invariance vectorielle-topologique d'un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$.

- Si $\Sigma(\Lambda)$ est du point de vue algébrique projectivement invariant, on a les équivalences :

(p_2) $\underleftarrow{H(\Lambda)}$ est topologiquement isomorphe à E_{Id}

(p'_2) $(\forall \lambda \in \Lambda)$ $(\lambda_H \in \mathfrak{L}(E_{Id}, E_\lambda))$ — invariance projective

(p''_2) $\tilde{\pi}_{Id} \in \mathfrak{L}(\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}, \underleftarrow{H(\Lambda)})$.

- Si $\Sigma(\Lambda)$ est du point de vue algébrique inductivement invariant, on a les équivalences :

(i_2) $K(\Lambda)$ est topologiquement isomorphe à E_{Id}

(i'_2) $(\forall \lambda \in \Lambda)$ $(\lambda_K \in \mathfrak{L}(E_\lambda, E_{Id}))$ — invariance inductive

(i''_2) $\tilde{j}_{Id} \in \mathfrak{L}(\underrightarrow{K(\Lambda)}, \underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda})$

Rappelons que $\mathfrak{L}(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues entre les deux e.l.c. E et F, et que λ_H et λ_K sont les applications définies au paragraphe 1.B.

Montrons tout d'abord l'équivalence $(p_2) \Leftrightarrow (p'_2)$ (resp. $(i_2) \Leftrightarrow (i'_2)$) .
Compte-tenu de l'hypothèse selon laquelle $\Sigma(\Lambda)$ est du point de vue algébrique projectivement invariant, la condition (p'_2) (resp. (i'_2)) est équivalente à l'inclusion vectorielle topologique

$$E_{Id} < \underleftarrow{\lim_{\lambda \in \Lambda}} (\lambda_H ; E_\lambda) \qquad \text{(resp. } \underrightarrow{\lim_{\lambda \in \Lambda}} (\lambda_K ; E_\lambda) < E_{Id})$$

or $\underleftarrow{\lim_{\lambda \in \Lambda}} (\lambda_H ; E_\lambda) = \underleftarrow{H(\Lambda)}$ (resp. $\underrightarrow{\lim_{\lambda \in \Lambda}} (\lambda_K ; E_\lambda) = \underrightarrow{K(\Lambda)}$)

par définition des espaces de Sobolev, et $\underleftarrow{H(\Lambda)} < E_{Id} < \underrightarrow{K(\Lambda)}$ d'après le corollaire du théorème 3 .

Les implications $(p_2) \Rightarrow (p''_2)$ et $(i_2) \Rightarrow (i''_2)$ sont évidentes ; inversement, on a $\tilde{\pi}_{Id} \circ \tilde{h}_\Lambda = Id_{(E_{Id})}$ (resp. $\tilde{k}_\Lambda \circ \tilde{j}_{Id} = Id_{(E_{Id})}$) avec

* -71-

$\tilde{h}_\Lambda \in \mathfrak{L}(\underleftarrow{H(\Lambda)}\,;\ \underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}\ )$ (resp. $\tilde{k}_\Lambda \in \mathfrak{L}(\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}\ ;\ \underrightarrow{K(\Lambda)}\ )$) ;

d'après le théorème 12 du chapitre 1, la condition (p''_2) (resp. (i''_2)) entraîne donc que $\tilde{\pi}_{Id}$ est un homomorphisme surjectif de $\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}$ sur $\underleftarrow{H(\Lambda)}$ (resp. $\tilde{j}_{Id}$ est un homomorphisme injectif de $\underrightarrow{K(\Lambda)}$ dans $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$).

Nous avons donc (cf. chap.I th.8 corol.1) l'égalité topologique :

$$\underleftarrow{H(\Lambda)} = \underrightarrow{\lim}\,(\tilde{\pi}_{Id}\ ;\ \underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}\ ) \quad (\text{resp. } \underrightarrow{K(\Lambda)} = \underleftarrow{\lim}\,(\tilde{j}_{Id}\ ;\ \underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}\ ))$$

d'où le résultat cherché, compte-tenu du corollaire 2 du théorème 13 (chap. I) . *

Definitions :

nous dirons qu'un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ est , " du point de vue topologique , " projectivement invariant " (resp. " inductivement invariant ") si les conditions (p_2) (resp. (i_2)) sont vérifiées .

Nous dirons qu' il est " topologiquement invariant " si les deux séries de conditions le sont .

* **Corollaire** :

Soit $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev dont tous les E_λ sont un même e.l.c. E. Il est topologiquement invariant si et seulement si E est stable par la famille de Sobolev Λ, et si les restrictions λ_E des λ à E , considérées comme applications à valeurs dans E, sont toutes linéaires continues de E dans lui-même.

En effet, ces applications λ_E ne sont autres que λ_H et λ_K qui coïncident dans ce cas particulier. *

Definition : Famille de Sobolev E-invariante.

Si E est un espace localement convexe inclus topologiquement dans D' , nous dirons qu' une famille de Sobolev Λ , de base D', est "E-invariante" si le système de Sobolev

$$\Sigma(\Lambda) = (\Lambda\ ,\ h_\Lambda\ ,\ k_\Lambda\ ,\ (E)_{\lambda\in\Lambda})$$

est topologiquement invariant.

* -72-

Il en résulte que toute famille de Sobolev de base D' est par définition D'-invariante(cf.th.1bis,corollaire).

D'autre part, en raison des théorèmes de dualité (cf. chap.III) qu'elles permettent d'obtenir, nous nous intéresserons spécialement aux familles de Sobolev D-invariantes, où D est l'e.l.c. de dual topologique D'.

Il est à remarquer que tous les espaces de Sobolev particuliers cités en exemple précédemment entrent dans ce cadre; par exemple, si on prend pour D' l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$, et si la famille de Sobolev Λ est composée de l'identité et de polynomes de dérivation (au sens des distributions) à coefficients dans l'anneau $\mathcal{E}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables (cf. Schwartz), les restrictions de ces polynomes à $\mathcal{D}(\Omega)$ coïncident avec les polynomes de dérivation dans $\mathcal{D}(\Omega)$ correspondants (au sens des fonctions), qui sont des opérateurs continus dans $\mathcal{D}(\Omega)$(cf.Trèves,chap.23

E : SYSTEMES DE SOBOLEV INTERMEDIAIRES ASSOCIES A UNE FAMLLE D-INVARIANTE .

Definition :

Soient Λ une famille de Sobolev D-invariante, $\Sigma'_o(\Lambda)$ le système de base, et $\Sigma_o(\Lambda) = (\Lambda , h_\Lambda , k_\Lambda , (D)_{\lambda\in\Lambda})$. Nous appellerons "système intermédiaire" tout système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ tel que l'on ait la double inclusion vectorielle-topologique:

$$\Sigma_o(\Lambda) < \Sigma(\Lambda) < \Sigma'_o(\Lambda)$$

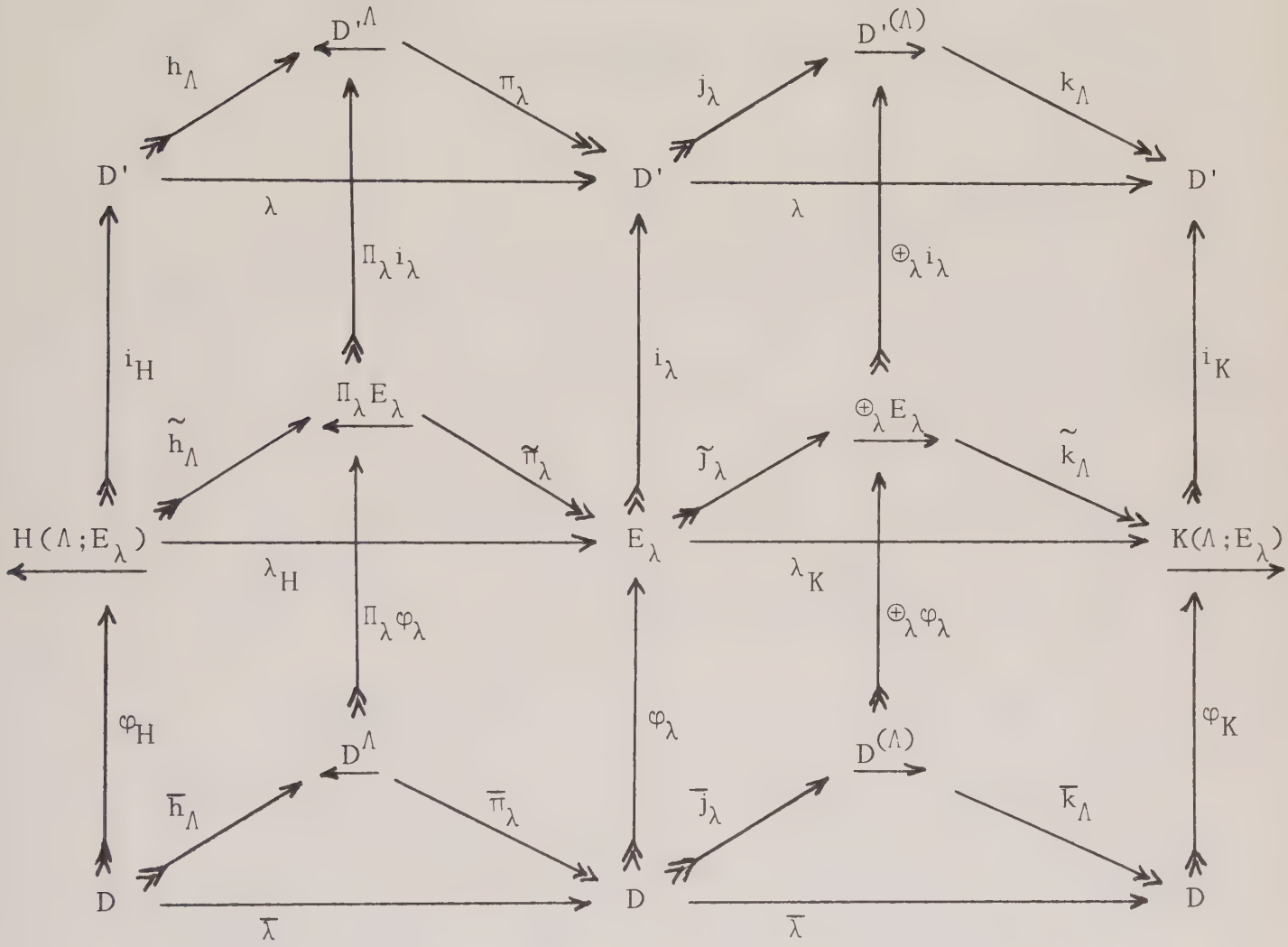
Si $\Sigma(\Lambda) = (\Lambda , h_\Lambda , k_\Lambda , (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, il revient au même de dire que pour tout $\lambda\in\Lambda$, E_λ est un espace intermédiaire entre D et D', soit:

$$D < E_\lambda < D'$$

Si φ_λ est l'injection canonique de D dans E_λ , et i_λ celle de E_λ dans D' , nous aurons le double-diagramme vectoriel-topologique

* -73-

suivant, que nous utiliserons constamment au chapitre III, avec les notations employées ci-dessous:



-74-

II.3 : PROPRIETES TOPOLOGIQUES PROPRES AUX ESPACES PROJECTIFS DE SOBOLEV .

Les notions topologiques que nous utiliserons dans ce paragraphe et le suivant sont contenues dans les quatre premiers chapitres du livre de Schaefer (cf. bibliographie).

A : FAMILLE FILTRANTE DE SEMI-NORMES .

Dans ce chapitre et le suivant, nous appellerons, pour abréger notre exposé, les familles filtrantes de semi-normes "familles semi-normales"

Soit $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev associé à une famille Λ de base D' . Puisque toute structure d'e.l.c. peut être définie à partir d'une famille semi-normale (à savoir les jauges des tonneaux qui sont voisinages de O), pour tout $\lambda \in \Lambda$, supposons la topologie de E_λ définie par une famille semi-normale $\mathfrak{F}_\lambda$; la topologie de l'e.v.t.-produit $\varprojlim_\lambda E_\lambda$ est alors définie par la famille semi-normale:

$$N_{\mathfrak{M},(N_\lambda)_{\lambda\in\mathfrak{M}}} : \begin{array}{ccc} \Pi_\lambda E_\lambda & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longrightarrow & \sup_{\lambda\in\mathfrak{M}} N_\lambda \circ \tilde{\pi}_\lambda(y) \end{array}$$

où $\mathfrak{M}$ appartient à l'ensemble $\mathfrak{pf}\Lambda$ des parties finies de Λ , et où, pour tout $\lambda \in \mathfrak{M}$, N_λ appartient à la famille $\mathfrak{F}_\lambda$ correspondante.

La topologie projective de $\varprojlim_\lambda H(\Lambda ; E_\lambda)$ est donc définie par la famille semi-normale:

$$\tilde{N}_{\mathfrak{M},(N_\lambda)_{\lambda\in\mathfrak{M}}} : \begin{array}{ccc} H(\Lambda ; E_\lambda) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longrightarrow & \sup_{\lambda\in\mathfrak{M}} N_\lambda \circ \lambda(x) \end{array}$$

pour $\mathfrak{M} \in \mathfrak{pf}\Lambda$, et, pour tout $\lambda \in \mathfrak{M}$, $N_\lambda \in \mathfrak{F}_\lambda$.

-75-

Proposition 1 :

Nous aurons les cas particuliers intéressants suivants:

1° : Si les E_λ sont métrisables, et si Λ est au plus dénombrable, l'espace projectif $\varprojlim H(\Lambda;E_\lambda)$ est métrisable.

C'est en effet un sous-espace de l'e.v.t. métrisable produit dénombrable d'espaces métrisables (cf. Bourbaki III.9).

2° : Si les E_λ sont normés, la topologie de $\varprojlim H(\Lambda;E_\lambda)$ est définie par la famille de normes:

$$\tilde{N}_{\mathfrak{M},n} : \quad H(\Lambda;E_\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad x \longrightarrow \frac{1}{n} \sup_{\lambda\in\mathfrak{M}} \| \lambda(x) \|_{E_\lambda}$$

pour $\mathfrak{M} \in \mathfrak{pf}\,\Lambda$ et $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que lorsque la famille Λ n'est pas finie, $\varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda$ n'est pas normable,(cf. Schaefer) et $\varprojlim H(\Lambda;E_\lambda)$ ne l'est généralement pas; en particulier, les espaces $\mathcal{D}_{L^p}$ de Schwartz ne le sont pas.

3° : Si Λ est finie et les E_λ normés, alors $\varprojlim H(\Lambda;E_\lambda)$ est normé, par la norme: $\tilde{N}_{\cdot}(x) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \| \lambda(x) \|_{E_\lambda}$.

On peut aussi utiliser les normes-produits équivalentes:

$$(\forall p : 1 \le p < \infty) \qquad \tilde{N}_p(x) = \Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} \| \lambda(x) \|^p_{E_\lambda} \Big)^{1/p}$$

C'est le cas de tous les espaces classiques $H^{p,m}(\Omega)$, $W^{p,m}_\sigma(\Omega)$, $\Xi^{p,m}_\rho(\Omega)$.

4° : Si Λ est finie, et les E_λ préhilbertiens, de produits scalaires respectifs $(\cdot\,|\,\cdot)_{E_\lambda}$, la norme $\tilde{N}_2$ sera préhilbertienne, puisqu'associée au produit scalaire : $\langle\!\langle x\,|\,y \rangle\!\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda} (\lambda(x) \,|\, \lambda(y))_{E_\lambda}$.

C'est le cas des espaces précédents lorsque $p = 2$.

-76-

B : CONSERVATION DES PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES E_λ .

Puisque $\varprojlim \mathcal{H}(\Lambda;E_\lambda)$ est une limite improjective (cf. th.2), et est de ce fait isomorphe à un sous-e.v.t. de $\prod_\lambda E_\lambda$, il possède toutes les propriétés du produit restant valables par passage à un sous-e.v.t., soit en particulier (cf. chap.1,parag.1,ex.1et2) :

Proposition 2 :

1° : Une partie A de $\varprojlim \mathcal{H}(\Lambda;E_\lambda)$ est bornée (resp. complète, précompacte, compacte) si et seulement si ses images $\lambda(A)$ sont respectivement bornées (resp. complètes, précompactes, compactes) dans les espaces E_λ .

2° : Un filtre contenu dans $\varprojlim \mathcal{H}(\Lambda;E_\lambda)$ est un filtre de Cauchy si et seulement si ses images sont des bases de filtre de Cauchy dans l'espace E_λ respectif.

Comme $\varprojlim \mathcal{H}(\Lambda;E_\lambda)$ est isomorphe au sous-e.v.t. $\varprojlim \tilde{h}_\Lambda(H)$ de $\varprojlim \prod_\lambda E_\lambda$ (cf.th.2), A est bornée (resp. complète, précompacte, compacte) si et seulement si $\tilde{h}_\Lambda(A)$ l'est dans $\varprojlim \tilde{h}_\Lambda(H)$, ou encore dans $\varprojlim \prod_\lambda E_\lambda$ (cf.chap.1,parag.1,ex.1) ; or une partie de l'e.v.t.-produit est bornée (resp.complète, précompacte, compacte) si et seulement si chacune de ses projections l'est (cf.chap.1,parag.1,ex.2) La première assertion résulte alors de ce que l'on a, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'égalité:

$\tilde{\pi}_\lambda \circ \tilde{h}_\Lambda = \lambda_H$ restriction de λ à $\mathcal{H}(\Lambda;E_\lambda)$, considérée à valeurs dans E_λ ; la deuxième se démontre de la même façon. *

Nous avons vu au théorème 2 que, lorsque les E_λ sont complets, l'espace projectif l'est si et seulement si son image par $\tilde{h}_\Lambda$ est fermée dans l'espace-produit $\varprojlim \prod_\lambda E_\lambda$; ceci résultera du théorème suivant, qui est aussi très important pour l'étude de la dualité des espaces de Sobolev (cf. chap.III parag.5) :

* -77-

* Théorème 7 : FERMETURE DE $H(\Lambda;E_\lambda)$ DANS L'ESPACE-PRODUIT .

$\tilde{h}_\Lambda(H(\Lambda;E_\lambda))$ est fermé dans l'espace-produit $\prod_\lambda E_\lambda$.

Considérons en effet un filtre $(x_i)_{i\in I}$ de $H(\Lambda;E_\lambda)$ dont l'image $(\tilde{h}_\Lambda(x_i))_{i\in I}$ converge dans l'espace-produit $\prod_\lambda E_\lambda$ vers un élément $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$; il est équivalent de dire que, pour tout $\lambda\in\Lambda$, $(\lambda(x_i))_{i\in I}$ converge dans E_λ vers y_λ . Du fait de l'inclusion vectorielle topologique: $E_\lambda \subset D'$, cette dernière convergence a aussi lieu dans D' .

D'autre part, l'identité de D' appartient à Λ ,et les $\lambda\in\Lambda$ sont continus; par conséquent le filtre $(x_i)_{i\in I}$ converge dans D' vers y_{Id} , et ses images $(\lambda(x_i))_{i\in I}$ convergent respectivement dans D' vers $\lambda(y_{Id})$. Comme $D'_{\mathfrak{S}}$ est séparé (puisque $\mathfrak{S}$ est par hypothèse une famille totale de bornés de D), tout filtre convergeant dans D' n'a qu'une limite, et par conséquent, pour tout $\lambda\in\Lambda$, nous aurons l'égalité: $\lambda(y_{Id}) = y_\lambda$; ainsi $(\tilde{h}_\Lambda(x_i))_{i\in I}$ converge dans $\prod_\lambda E_\lambda$ vers $\tilde{h}_\Lambda(y_{Id}) \in \tilde{h}_\Lambda(H(\Lambda;E_\lambda))$. *

* Corollaire 1 : TRANSFERT DE LA COMPLETION .

Si tous les E_λ sont complets (resp. quasi-complets (a), semi-complets (b)), l'espace projectif de Sobolev $H(\Lambda;E_\lambda)$ l'est aussi.

Compte-tenu du théorème 2, c'est une conséquence immédiate du théorème 7 .

* Corollaire 2 :

Si Λ est finie ou dénombrable, et si tous les E_λ sont des espaces de Fréchet (c), alors $H(\Lambda;E_\lambda)$ est aussi un espace de Fréchet.

Si Λ est finie, $H(\Lambda;E_\lambda)$ est un espace de Banach quand les E_λ le sont.

(a) On rappelle qu'un e.l.c. séparé E est "quasi-complet" si toute partie fermée bornée de E est complète;

(b) E est "semi-complet" si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

(c) Un "espace de Fréchet" est un e.l.c. métrisable complet.

* -78-

C'est une conséquence du corollaire 1 et de la proposition 2 .

*

On retrouve ainsi les propriétés des espaces de Sobolev classiques, ainsi que de l'espace $\mathcal{D}_{L^p}$ (cf. Necas, chap.2 et 6; Lions-Magénès chap.2 parag.6; Schwartz, chap. 6):

les espaces $H^{p,m}(\Omega)$, $W_\sigma^{p,m}(\Omega)$, $\Xi_\rho^{p,m}(\Omega)$ sont des espaces de Banach, pour $p \in [1,+\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$, puisque l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach, et que les familles de Sobolev respectives, Λ_m , $\Lambda_{\rho,m}$, sont finies;

de même, l'espace $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ est un espace de Fréchet pour $p \in [1,+\infty]$, puisque Λ_∞ , équipotent à $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, est dénombrable.

* **Corollaire 3 : TRANSFERT DE LA SEMI-REFLEXIVITE .**

Si tous les E_λ sont semi-réflexifs (a), $\varprojlim H(\Lambda;E_\lambda)$ l'est aussi.

En effet, $\prod_\lambda E_\lambda$ est semi-réflexif comme produit d'espaces semi-réflexifs, et $\widetilde{h}_\Lambda(H(\Lambda;E_\lambda))$ l'est aussi, comme sous-espace fermé d'un espace semi-réflexif (cf. Schaefer chap.4).

*

On ne peut avoir a priori le même type de résultat pour la réflexivité (b), car si $\prod_\lambda E_\lambda$ est tonnelé comme produit d'espaces tonnelés, un sous-espace fermé d'un espace tonnelé n'est pas nécessairement tonnelé. Nous aurons toutefois le résultat partiel, important dans la pratique:

* **Corollaire 4 : CAS DES ESPACES METRISABLES REFLEXIFS .**

Si Λ est finie ou dénombrable, et si tous les E_λ sont métrisables et réflexifs, $\varprojlim H(\Lambda;E_\lambda)$ est alors métrisable et réflexif.

(a) Un e.l.c. "semi-réflexif" est un e.l.c. algébriquement isomorphe à son bidual (i.e. dual topologique de son dual fort). Une condition nécessaire et suffisante est que toute partie bornée de l'espace soit faiblement-relativement-compacte.

(b) Un e.l.c. "réflexif" est un e.l.c. topologiquement isomorphe à son bidual. Une condition nécessaire et suffisante est qu'il soit semi-réflexif et "tonnelé" Un espace "tonnelé" est un e.l.c. dans lequel toute partie convexe équilibrée fermée absorbante (ou "tonneau") est un voisinage de O .

* -79-

La métrisabilité de $\underset{\leftarrow}{H}(\Lambda;E_\lambda)$ a été démontrée à la proposition 1, la semi-réflexivité au corollaire 3; d'où le résultat grâce au lemme suivant:

Lemme : Un espace métrisable semi-réflexif est réflexif.

En effet, tout espace semi-réflexif est semi-complet (et même quasi-complet: cf. Schaefer); comme dans un espace métrisable, la convergence des suites est équivalente à celle des filtres, c'est un espace de Fréchet, et il est donc tonnelé en vertu du théorème de Baire.

*

Ceci entraîne en particulier la réflexivité, pour $p \in]1,+\infty[$, des espaces de Sobolev classiques $H^{p,m}(\Omega)$, $W_0^{p,m}(\Omega)$, $\Xi_\rho^{p,m}(\Omega)$. et de l'espace $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, puisque $L^p(\Omega)$ est alors un espace de Banach réflexif.

* Theoreme 8 : CAS DES ESPACES METRISABLES ET SEPARABLES .

Si Λ est finie ou dénombrable, et si tout E_λ est métrisable et séparable, alors $\underset{\leftarrow}{H}(\Lambda;E_\lambda)$ est métrisable et séparable.

D'après Bourbaki, Top. Gén. chap. 9, tout sous-e.v.t. d'un espace métrisable et séparable est métrisable et séparable; compte-tenu du théorème 2, le théorème 8 résultera donc du lemme suivant (cf. Dieudonné. chap. 12):

Lemme : Tout produit fini ou dénombrable d'espaces métrisables et séparables est métrisable et séparable.

Démontrons pour finir un théorème relatif aux inclusions vectorielles-topologiques des systèmes de Sobolev:

Theoreme 9 :

Considérons deux systèmes de Sobolev sur une même famille Λ, liés par l'inclusion vectorielle-topologique: $\Sigma_1(\Lambda) < \Sigma_2(\Lambda)$.

Alors, si pour tout $\lambda \in \Lambda$, $E_{1,\lambda}$ est fermé dans $E_{2,\lambda}$, $H(\Lambda;E_{1,\lambda})$ est fermé dans $\underset{\leftarrow}{H}(\Lambda;E_{2,\lambda})$.

-80-

Conservons les notations du diagramme projectif d'inclusion (cf. parag. 2 - C. 1er diagramme) . Soit donc un filtre $(x_i)_{i\in I}$ contenu dans $H(\Lambda;E_{1,\lambda})$ dont l'image par l'injection canonique φ_H converge dans $\overleftarrow{H(\Lambda;E_{2,\lambda})}$ vers un élément y ; par conséquent, pour tout $\lambda\in\Lambda$, la base du filtre $(\lambda(\varphi_H(x_i)))_{i\in I} = (\lambda_{H_2}\circ\varphi_H(x_i))_{i\in I}$ converge dans $E_{2,\lambda}$ vers $\lambda(y)$.

D'après le diagramme projectif d'inclusion, nous avons l'égalité :

$$\lambda_{H_2}\circ\varphi_H = \varphi_H\circ\lambda_{H_1} \quad ;$$

comme $(\lambda_{H_1}(x_i))_{i\in I}$ est contenu dans $E_{1,\lambda}$, $(\varphi_H\circ\lambda_{H_1}(x_i))_{i\in I}$ est contenu dans $\varphi_\lambda(E_{1,\lambda})$ qui par hypothèse est fermé dans $E_{2,\lambda}$, donc converge dans $E_{2,\lambda}$ vers $\lambda(y)$. Ainsi, pour tout $\lambda\in\Lambda$, $\lambda(y)$ appartient à $E_{1,\lambda}$, et donc $y\in H_1(\Lambda;E_\lambda)$; d'où le résultat cherché . *

-81-

II.4 : PROPRIETES TOPOLOGIQUES PROPRES AUX ESPACES INDUCTIFS DE SOBOLEV .

A : FAMILLE FILTRANTE DE SEMI-NORMES .

D'après le théorème 2, nous savons que tout espace inductif $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$ associé à un système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ est isomorphe à l'e.v.t. - quotient de la somme directe $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$ par le noyau de l' homomorphisme inductif $\tilde{k}_\Lambda$.

Si les e.l.c. E_λ sont définis par des familles " semi-normales", nous obtiendrons donc une famille semi-normale $\mathfrak{J}$ définissant $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$ en prenant la famille semi-normale quotient (a) d'une famille semi -normale $\mathfrak{J}$ définissant $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$ (cf. Schaefer. chap. II exerc.8) .

Nous avons vu (chap.I parag.2 ex.2) que si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ est une base de tonneaux (i.e. parties convexes, équilibrées, fermées et absorbantes) voisinages de O dans E_λ, on obtient une base $\mathfrak{B}$ de voisinages convexes équilibrés de O dans $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$ en considérant, pour toute famille $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_\lambda \mathfrak{B}_\lambda$, les ensembles :

$$\Gamma(\cup_\lambda V_\lambda) = \{ \oplus_\lambda \alpha_\lambda x_\lambda : (\oplus_\lambda \alpha_\lambda \in [0,1]^{(\Lambda)}) \text{ et } (\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \leq 1) \text{ et } (\forall \lambda)\,(x_\lambda \in V_\lambda) \}$$

(a) Si N est une semi-norme sur un espace vectoriel E, et E_N l'espace vectoriel normé ainsi défini, alors pour tout F sous - espace vectoriel de E, $\varinjlim (E_{N/F})$ est un espace vectoriel normé par la norme $\tilde{N}$ définie par :

$$\tilde{N}(x) = \inf\{N(y) : y \in x\}$$

où x est un élément de $E_{/F}$ et y un représentant de x.

$\tilde{N}$ s'appelle alors " norme-quotient de N " .

De même, si E est un e.l.c. défini par une famille semi - normale $\mathfrak{J}$, alors $\varinjlim (E_{/F})$ est un e.l.c. défini par la " famille semi-normale quotient " $\tilde{\mathfrak{J}}$ de $\mathfrak{J}$ ensemble des normes - quotients des normes de la famille $\mathfrak{J}$.

-82-

Chaque e.l.c. E_λ est défini par la famille semi-normale $\mathfrak{F}_\lambda$ des jauges N_λ des éléments V_λ de $\mathfrak{B}_\lambda$, et x_λ appartient à V_λ si et seulement si $N_\lambda(x_\lambda) \leq 1$.

De même, $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$ est défini par les jauges $N_{(N_\lambda : \lambda \in \Lambda)}$ des $\Gamma(U_\lambda V_\lambda)$;

ce sont les applications : $N_{(N_\lambda : \lambda \in \Lambda)} : \oplus_\lambda E_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$x = \oplus_\lambda(x_\lambda) \longrightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda(x_\lambda)$$

car tout élément $x = \oplus_\lambda \alpha_\lambda x_\lambda$ de $\Gamma(U_\lambda V_\lambda)$ vérifie

$$N_{(N_\lambda : \lambda \in \Lambda)}(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda(\alpha_\lambda x_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda N_\lambda(x_\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \leq 1$$

et inversement si $y = \oplus_\lambda y_\lambda$ vérifie l'inégalité : $\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda(y_\lambda) \leq 1 \right)$,

il se met sous la forme $y = \oplus_\lambda \alpha_\lambda x_\lambda$ avec $\alpha_\lambda = N_\lambda(y_\lambda)$, $x_\lambda = y_\lambda$ si $N_\lambda(y_\lambda) = 0$

et $x_\lambda = \dfrac{y_\lambda}{N_\lambda(y_\lambda)}$ si $N_\lambda(y_\lambda) \neq 0$, ce qui montre que y appartient à $\Gamma(U_\lambda V_\lambda)$.

(cette équivalence montre de plus que $\Gamma(U_\lambda V_\lambda)$ est fermé dans $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$ et donc est un tonneau) .

Par passage au quotient par le noyau de $\tilde{k}_\Lambda$, nous obtenons ainsi la famille semi-filtrante définissant $\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda)$:

$$\tilde{N}_{(N_\lambda : \lambda \in \Lambda)}(x) = \inf \{ N_{(N_\lambda : \lambda \in \Lambda)}(\oplus_\lambda x_\lambda) : (x = \tilde{k}_\Lambda(\oplus_\lambda x_\lambda)) \}$$

d'où le résultat :

Proposition 3 :

Soit $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev de base D' ; supposons que les E_λ soient définis par des familles filtrantes de semi-normes $\mathfrak{F}_\lambda$; alors l'espace inductif $\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda)$ est défini par la famille des semi-normes :

$$\tilde{N}_{(N_\lambda : \lambda \in \Lambda)}(x) = \inf \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda(x_\lambda) : \left(x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda(x_\lambda) \right) \right\}$$

lorsque $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ parcourt $\prod_\lambda \mathfrak{F}_\lambda$.

-83-

Contrairement à ce que nous avions dans le cas des espaces projectifs de Sobolev, il semble que si Λ n'est pas finie, et si les E_λ sont métrisables, l'espace inductif $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$ ne l'est pas nécessairement ; en effet, même si Λ est dénombrable, $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$ n'est pas métrisable (cf. Schaefer chap.2 exerc. 11). L'analogue de la proposition 1 sera la proposition suivante :

Proposition 4 :

1° : Si Λ est finie et les E_λ métrisables, $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$ est métrisable.

En effet, $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$ est alors isomorphe à $\varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda$, et est donc métrisable. Si $\mathfrak{J}$ est une famille semi-normale dénombrable définissant la topologie de la somme directe topologique, la famille quotient $\tilde{\mathfrak{J}}$ de $\mathfrak{J}$ est dénombrable, et par conséquent $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$, isomorphe à l'espace-quotient, est métrisable (cf. Schaefer chap.I).

2° : Si les E_λ sont normés, la topologie de $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$ est définie par la famille de semi-normes :

$$\tilde{N}_{(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}}(x) = \inf\Big\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{n_\lambda} \,||\, x_\lambda \,||_{E_\lambda} : \Big(x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(x_\lambda)\Big)\Big\}$$

lorsque $(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ parcourt $(\mathbb{N} - \{0\})^\Lambda$.

3° : Si Λ est finie et les E_λ normés, $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$ est normé, comme quotient de l'e.v.n. $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda \approx \varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda$; la norme issue de $\tilde{\mathfrak{J}}$ est

$$\tilde{N}_1(x) = \inf\Big\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} ||x_\lambda||_{E_\lambda} : \Big(x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(x_\lambda)\Big)\Big\} ;$$

nous avons aussi les normes équivalentes :

$$(\forall p) : (1 \le p < +\infty) \quad \tilde{N}_p(x) = \inf\Big\{\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} ||x_\lambda||^p_{E_\lambda}\Big)^{1/p} : \Big(x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(x_\lambda)\Big)\Big\}$$

*

-84-

En particulier, ceci montre que l'espace de Sobolev classique $H^{p',-m}(\Omega)$, dual fort de $\overset{\circ}{H}{}^{p,m}(\Omega)$ fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^{p,m}(\Omega)$ (pour $p,p' \in]1, +\infty[$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), qui est normé par la norme ci-dessus (cf. Trèves chap. 31), n'est autre que l'espace inductif de Sobolev $L(\Lambda_m ; L^p(\Omega))$. Nous verrons à la fin du chapitre III l'analogue pour les espaces de Sobolev avec poids.

De même, l'espace $\Xi_p^{p',-m}$ dual de $\Xi_p^{p,m}$ pour $p,p' \in]1, +\infty[$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (cf. Lions-Magénès) est algébriquement et topologiquement espace inductif de Sobolev $\underrightarrow{K(\Lambda_{p,-m} ; L^p(\Omega))}$.

En fait ces résultats seront un cas particulier des théorèmes de dualité du chapitre III.

4° : Si Λ est finie et si les E_λ sont des espaces de Hilbert, $K(\Lambda;E_\lambda)$ est un espace de Hilbert. Soient en effet $(. \mid .)_{E_\lambda}$ les produits scalaires respectifs ; $\oplus_\lambda E_\lambda \approx \Pi_\lambda E_\lambda$ est un espace de Hilbert pour la norme N_2, associée au produit scalaire

$$(\!(\oplus_\lambda x_\lambda \mid \oplus_\lambda y_\lambda)\!)_\oplus = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x_\lambda \mid y_\lambda)_{E_\lambda} ;$$

l'espace $K(\Lambda;E_\lambda)$, qui est isomorphe au quotient de la somme directe par le noyau de l'homomorphisme inductif $\tilde{k}$, est donc isomorphe à l'orthogonal du noyau de $\tilde{k}$ (cf. Bourbaki e.v.t. chap. V) : et si p est le projecteur (continu) associé à l'orthogonal, pour toute représentation de $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(x_\lambda) \in K(\Lambda;E_\lambda)$, on a encore la norme :

$$N_2(x) = N_2(p(\oplus_\lambda x_\lambda)) = \Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} \| p(x_\lambda) \|^2_{E_\lambda} \Big)^{1/2}$$

associée au produit scalaire $(\!(x \mid y)\!)_K = \sum_{\lambda\in\Lambda} (p(x_\lambda) \mid p(y_\lambda))_{E_\lambda}$

si $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(x_\lambda)$ et $y = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda(y_\lambda)$.

Enfin, $K(\Lambda;E_\lambda)$ est alors complet puisqu'isomorphe à l'orthogonal du noyau, sous-e.v.t. fermé, donc complet, de $\oplus_\lambda E_\lambda$.

*

-85-

B : CONSERVATION DES PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES E_λ .

$\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda)$ étant une limite inductive, nous aurons tout d'abord la proposition suivante (cf. Grothendieck, chap. IV) :

Proposition 5 :

Si les E_λ sont bornologiques (a) (resp. tonnelés , quasi-tonnelés (b), espaces de Mackey (c)) il en est de même pour $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$; en particulier, si les E_λ sont tous métrisables (sans condition de cardinalité sur Λ), $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$ est bornologique (même s'il n'est pas métrisable).

La proposition 5 énonce en fait des propriétés générales des limites inductives ; le cas tonnelé est démontré par Grothendieck au chapitre III, le cas bornologique et quasi-tonnelé au chapitre IV (cf. aussi Schaefer chap. II) ; pour les espaces de Mackey, voir Schaefer chap. IV .

*

Puisque d'après le théorème 2, $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$ est isomorphe au quotient de la somme directe topologique $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$ par le noyau de l'homomorphisme inductif associé $\tilde{k}_\Lambda$, nous allons retrouver toutes les difficultés rencontrées pour les e.v.t.-quotients (cf. chap.I parag.2 ex. 1) : l'image par $\tilde{k}_\Lambda$ d'une partie bornée (resp. précompacte, compacte) de la somme directe topologique, est bornée (resp. précompacte, compacte), mais inversement, on ne sait pas si une partie bornée (resp. précompacte) provient d'une partie bornée (resp. précompacte) de la somme directe, et tout filtre de Cauchy de $\varinjlim K(\Lambda;E_\lambda)$ ne provient pas nécessairement d'un filtre de Cauchy de $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$.

(a) Un espace "bornologique" est un e.l.c.E dans lequel toute partie convexe équilibrée qui absorbe tout borné de E, est un voisinage de O. Tout e.l.c. métrisable est bornologique .

(b) Un espace "quasi-tonnelé" (ou "infra-tonnelé") est un e.l.c. dans lequel tout tonneau qui absorbe tout borné de E, est un voisinage de O. Les espaces tonnelés ou bornologiques sont quasi-tonnelés.

(c) Un "espace de Mackey" est un e.l.c. E dont la topologie est la plus fine des topologies compatibles avec la dualité $\langle E, E' \rangle$ (cf. chap. III, et Schaefer chap. IV). Tout espace tonnelé ou bornologique est un espace de Mackey.

-86-

Nous nous limiterons donc au cas où le noyau de $\tilde{k}_\Lambda$ admet un supplémentaire topologique dans la somme directe ;
ceci équivaut, d'après le théorème 12 du chapitre I, à l'existence d'un inverse à droite continu de $\tilde{k}_\Lambda$, ou encore à l'isomorphie de $\overrightarrow{K(\Lambda;E_\lambda)}$ avec un supplémentaire topologique du noyau de $\tilde{k}_\Lambda$.

Nous avons déjà rencontré deux cas particuliers de ce type :
- lorsque Λ est finie et que les E_λ sont tous des espaces de Hilbert (cf. propos. 4)
- lorsque $\Sigma(\Lambda)$ est du point de vue topologique, inductivement invariant, puisque $\tilde{k}_\Lambda$ est alors continuement inversible à droite par $\tilde{j}_{Id}$ (cf. parag. 2 D, th. 6)

Il serait intéressant de mettre en évidence des exemples moins triviaux .

Proposition 6 :

Soit $K(\Lambda;E_\lambda)$ un espace inductif de Sobolev dont le noyau N de l'homomorphisme associé $\tilde{k}_\Lambda$ admet un supplémentaire topologique M dans la somme directe topologique $\oplus_\lambda E_\lambda$. Alors

1° Une partie A de $\overrightarrow{K(\Lambda;E_\lambda)}$ est bornée (resp. précompacte, compacte) si et seulement s'il existe une partie finie $\mathfrak{M}$ de Λ telle que l'intersection avec M de l'image réciproque $k_\Lambda^{-1}(A)$ soit une partie bornée (resp. précompacte, compacte) du produit fini $\prod_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_\lambda$.

2° Un filtre Φ contenu dans $K(\Lambda;E_\lambda)$ est un filtre de Cauchy si et seulement s'il existe une partie finie $\mathfrak{M}$ de Λ telle que le filtre réciproque dans l'isomorphisme de $\underleftarrow{M}$ et $\overrightarrow{K(\Lambda;E_\lambda)}$ soit un filtre de Cauchy dans $\prod_{\lambda\in\mathfrak{M}} E_\lambda$.

Il suffit pour cela d'utiliser l'isomorphisme entre $\underleftarrow{M}$ et $\overrightarrow{K(\Lambda;E_\lambda)}$ et d'utiliser la caractérisation des parties bornées (resp. précompactes, compactes) dans la somme directe, puis dans le sous-e.v.t. $\underleftarrow{M}$.

$\underleftarrow{M}$ est fermé dans $\oplus_\lambda E_\lambda$ puisqu'il admet un supplémentaire topologique ; nous aurons donc le théorème suivant :

-87-

Theoreme 10 :

Soit $K(\Lambda;E_\lambda)$ un espace inductif de Sobolev dont le noyau N de l'homomorphisme associé k_λ admet un supplémentaire topologique dans $\oplus_\lambda E_\lambda$. Alors $K(\Lambda;E_\lambda)$ est complet (resp. quasi-complet, semi-complet, semi-réflexif, réflexif) lorsque tous les E_λ le sont .

La conservation des quatre premières propriétés résulte de ce qu'elles sont vérifiées par la somme directe, et conservées par passage au sous-e.v.t. fermé M ; la réflexivité résulte de la quatrième propriété, associée à la proposition 5 (cf. Schaefer chapitre IV) . *

CHAPITRE III

ETUDE DE LA DUALITE DANS LES ESPACES DE SOBOLEV .

Nous introduisons au paragraphe 2 les notions de famille duale et de système dual d'une famille et d'un système de Sobolev donnés, sous des conditions d'existence faisant intervenir des propriétés de continuité de la transposée topologique, démontrées au premier paragraphe.

Les paragraphes 3 et 4 sont respectivement consacrés à la caractérisation algébrique des espaces de Sobolev associés aux systèmes duals, appelés " espaces de type dual $\overleftarrow{H_*}$ et $\overrightarrow{K_*}$ " , et à l'étude algébrique du lien existant entre ces espaces et les duals des espaces de Sobolev de départ ; on obtient en particulier une caractérisation algébrique du dual de la fermeture $\overleftarrow{H_0}$ de D dans $\overleftarrow{H}$, qui généralise les résultats analogues des espaces de Sobolev classiques .

Nous étudions ensuite , au paragraphe 5, les conditions de coïncidence topologique ; en particulier, la caractérisation algébrique précédente est aussi topologique , à condition de considérer les topologies de dual fort dans le cas où les espaces de Sobolev sont normés ou réflexifs, et dans le cas général, les topologies de Mackey.

Enfin, ces résultats, appliqués dans le paragraphe 6 aussi bien aux espaces de Sobolev classiques qu'à certains espaces de distributions, permettent de retrouver immédiatement les théorèmes classiques de structure des duals de ces espaces .

- 89 -

III.1 : CONTINUITE DE LA TRANSPOSE TOPOLOGIQUE D'UNE APPLICATION LINEAIRE CONTINUE .

Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence quelques résultats simples touchant la continuité de la transposée topologique d'une application linéaire continue ; ces propriétés clarifieront notre exposé de la dualité des espaces de Sobolev, et motiveront de plus l'introduction de certaines topologies de dualité particulières.

Tout d'abord, rappelons brièvement que si E est un e.v.t. localement convexe (qui sera pour nous toujours séparé), et si $\mathfrak{S}$ est une famille filtrante et homothétique (a) de parties bornées de E , on définit sur le dual topologique E' de E une topologie localement convexe, compatible avec sa structure vectorielle, en prenant comme base de voisinages de 0 (convexes équilibrés) dans E' les polaires A° des éléments A de $\mathfrak{S}$ (b); on appelle "$\mathfrak{S}$-topologie" la topologie précédente, ou encore "topologie de convergence uniforme sur les parties de E appartenant à $\mathfrak{S}$ ", et l'on note $E'_{\mathfrak{S}}$ l'e.v.t. ainsi obtenu.

On vérifie de plus que la $\mathfrak{S}$-topologie est séparée si et seulement si la famille $\mathfrak{S}$ est totale, i.e. si ses éléments forment un recouvrement de E.

(a) On dit qu'une famille $\mathfrak{S}$ de parties de E est "filtrante" si toute réunion finie d'éléments de $\mathfrak{S}$ est contenue dans un élément de $\mathfrak{S}$, et "homothétique" si les parties homothétiques $(\lambda A)_{\lambda>0}$ des éléments A de $\mathfrak{S}$, appartiennent à $\mathfrak{S}$.

(b) Si $\langle x', x \rangle$ désigne la forme bilinéaire de dualité entre E et E' (pour $x \in E$ et $x' \in E'$), on appelle "polaire" (absolu) d'une partie A de E (resp. A' de E') la partie de E' (resp. E) suivante:

$$A^\circ = \{ x' \in E' : \forall x \in A , \ |\langle x', x \rangle| \leq 1 \}$$

$$(\text{resp. } A'^\circ = \{ x \in E : \forall x' \in A', \ |\langle x', x \rangle| \leq 1 \})$$

Et on appelle "bipolaire de A" la partie $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$ de E ; c'est aussi l'enveloppe convexe équilibrée faiblement fermée de A (cf. "théorème des bipolaires", dans Bourbaki, Grothendieck ou Schaefer). On a toujours: $A \subset A^{\circ\circ}$.

* -90-

Démontrons maintenant une propriété qui caractérise la continuité de la transposée topologique d'une application linéaire continue :

* Theoreme 1 : CRITERE DE CONTINUITE DE LA TRANSPOSEE TOPOLOGIQUE .

Soient E,F deux e.l.c. séparés, $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) une famille filtrante et homothétique de parties bornées de E (resp. F), u une application linéaire continue de E dans F, et u* sa transposée topologique .

Une condition nécessaire et suffisante pour que u* soit continue de $F'_{\mathfrak{T}}$ dans $E'_{\mathfrak{S}}$ est que l'image par u de tout élément de $\mathfrak{S}$ soit contenue dans le bipolaire d'un élément de $\mathfrak{T}$; soit la relation :

$$\forall A \in \mathfrak{S}, \exists B \in \mathfrak{T} : u(A) \subset B^{\circ\circ}$$

(pour la définition du bipolaire, voir la note (b) précédente)

Compte-tenu des bases respectives de voisinages de O dans $E'_{\mathfrak{S}}$ et $F'_{\mathfrak{T}}$, la continuité de u* est équivalente à la relation :

$$\forall A \in \mathfrak{S}, \exists B \in \mathfrak{T} : u^*(B^\circ) \subset A^\circ \ ;$$

il suffit donc de montrer que les deux relations d'inclusions :

$$u^*(B^\circ) \subset A^\circ \quad \text{et} \quad u(A) \subset B^{\circ\circ}$$

sont équivalentes . Comme les inclusions se renversent par passage aux polaires, les relations

$$u(A) \subset B^{\circ\circ} \quad \text{et} \quad B^\circ \subset (u(A))^\circ$$

sont équivalentes, compte-tenu de ce que $B^{\circ\circ\circ} = B^\circ$; mais cette dernière inclusion équivaut à la relation :

$$\forall y' \in B^\circ , \forall x \in A , \quad |\langle y', u(x)\rangle| \leq 1$$

elle-même équivalente, par définition de la transposée, à la suivante :

$$\forall y' \in B^\circ , \forall x \in A , \quad |\langle u^*(y'), x\rangle| \leq 1$$

et par conséquent à l'inclusion : $u^*(B^\circ) \subset A^\circ$

soit le résultat cherché . *

Du théorème 1 résulte la continuité de la transposée topologique pour les topologies "usuelles" suivantes :

-91-

Corollaire 1 :

La transposée topologique est continue pour les topologies de dual faible (i.e. de $\sigma(F', F)$ dans $\sigma(E', E)$) resp. topologies de Mackey (i.e. de $\tau(F', F)$ dans $\tau(E', E)$) resp. topologies de dual fort (i.e. de $\beta(F', F)$ dans $\beta(E', E)$) (a) .

Dans le cas des topologies de dual faible, le critère de continuité de u* est vérifié de façon évidente, puisque l'image d'une partie finie est une partie finie. Pour les topologies de Mackey, nous aurons besoin du résultat suivant (cf. par exemple Garsoux chap. 9) :

Lemme :

Une application linéaire continue entre deux e.l.c. séparés, E et F, est continue pour les topologies affaiblies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(F, F')$.

L'image d'une partie convexe, équilibrée, faiblement compacte de E (i.e. $\sigma(E, E')$ - compacte) est donc convexe, équilibrée et faiblement compacte dans F, puisque u est linéaire et transporte la faible compacité en raison de sa faible continuité .

Le cas des topologies de dual fort résulte de ce que l'image d'une partie bornée par une application linéaire continue est une partie bornée .

*

Les deux corollaires suivants, de vérification immédiate, seront utilisés lors de l'étude topologique de la dualité des espaces de Sobolev :

(a) Rappelons que si E est un e.l.c., on appelle :
- " topologie de dual faible " (notée $\sigma(E', E)$) la topologie de convergence uniforme sur $\mathfrak{S}_\sigma$ ensemble des parties finies de E (encore appelée "convergence simple ") ;
- " topologie de dual fort " (notée $\beta(E', E)$) la topologie de convergence uniforme sur l'ensemble $\mathfrak{S}_\beta$ des parties bornées de E ;
- " topologie de Mackey " (notée $\tau(E', E)$) la topologie de convergence uniforme sur l'ensemble $\mathfrak{S}_\tau$ des parties convexes, équilibrées et faiblement compactes de E; c'est aussi la plus fine $\mathfrak{S}$-topologie sur E' telle que E soit dual topologique de $E'_{\mathfrak{S}}$ (cf. Schaefer chap.4 , et Grothendieck chap.2 et 4)

* -92-

* **Corollaire 2** :

Soient E,F deux e.l.c. séparés, et $u : E \to F$ une application linéaire continue . Si $\mathfrak{S}$ est une famille filtrante et homothétique de parties bornées de E, la transposée topologique u^* de u est continue de F' muni de la $u(\mathfrak{S})$-topologie, dans E' muni de la $\mathfrak{S}$-topologie .

En effet, $u(\mathfrak{S})$ est alors une famille filtrante et homothétique de parties bornées de F, et le critère de continuité est trivialement vérifié pour les familles $\mathfrak{S}$, et $\mathfrak{T} = u(\mathfrak{S})$.

*

Remarquons que, lorsque $\mathfrak{S}$ est totale (et donc $E'_{\mathfrak{S}}$ séparé), $u(\mathfrak{S})$ ne l'est que lorsque u est surjective ; $F'_{u(\mathfrak{S})}$ est donc séparé si et seulement si $\mathfrak{S}$ est totale et u surjective .

* **Corollaire 3** :

Soient E,F deux e.l.c. séparés, et $u : E \to F$ linéaire continue. Si $\mathfrak{T}$ est une famille filtrante et homothétique de parties bornées de F, et si $u^{-1}(\mathfrak{T})$ est une famille de bornés de E, alors u^* est continue de F' muni de la $\mathfrak{T}$-topologie dans E' muni de la $u^{-1}(\mathfrak{T})$- topologie .

* Remarques :

(1) Une condition nécessaire pour que $u^{-1}(\mathfrak{T})$ soit une famille de bornés de E est que u soit injective , puisque sinon tout élément de $u^{-1}(\mathfrak{T})$ contient le noyau de u qui n'est pas borné (c'est un sous-espace vectoriel de dimension non nulle) ; elle n'est pas suffisante : l'injection canonique de l'espace de Sobolev classique $H^{1,1}(]0,1[)$ dans $L^1(]0,1[)$ est continue, mais la suite des $(n x^n)_{n>0}$, bornée dans L^1 ne l'est pas dans $H^{1,1}$.

(2) Une condition suffisante pour que $u^{-1}(\mathfrak{T})$ soit une famille de bornés est que u soit un homomorphisme injectif ; en effet E est alors isomorphe au sous-e.v.t. u(E) de F, et $u^{-1}(\mathfrak{T}) = u^{-1}(\overline{\mathfrak{T}}) = (\overline{u})^{-1}(\overline{\mathfrak{T}})$ où $\overline{\mathfrak{T}}$ est la famille de bornés, trace de $\mathfrak{T}$ sur u(E), et $(\overline{u})^{-1}$ l'inverse continu de u considérée à valeurs dans u(E).

Elle n'est pas nécessaire car si u est seulement injective, et $\mathfrak{S}$ une famille de bornés de E, alors la famille $\mathfrak{T} = u(\mathfrak{S})$ est une famille de bornés de F, et $u^{-1}(\mathfrak{T}) = u^{-1}(u(\mathfrak{S})) = \mathfrak{S}$ puisque u est injective .

* -93-

III.2 : FAMILLES ET SYSTEMES DE SOBOLEV DUALS.

A : FAMILLE DUALE D'UNE FAMILLE DE SOBOLEV D-INVARIANTE .

Soient D un e.l.c. séparé, et $D'_{\mathfrak{S}}$ son dual topologique muni de la topologie de convergence uniforme sur un ensemble $\mathfrak{S}$ filtrant, homothétique, total de parties bornées de D .

Considérons alors une famille de Sobolev Λ , de base $D'_{\mathfrak{S}}$, et D-invariante ; rappelons que cela signifie que D est inclus topologiquement dans $D'_{\mathfrak{S}}$, et qu'il coïncide topologiquement avec les espaces $H(\Lambda ; D)$ et $K(\Lambda ; D)$ associés au système de Sobolev

$$\Sigma_o(\Lambda) = (\Lambda , h_\Lambda , k_\Lambda , (D)_{\lambda \in \Lambda})$$

(cf. chap. II parag.2 section D) ; cette dernière condition entraîne que les restrictions $\overline{\lambda}$ des $\lambda \in \Lambda$ sont à valeurs dans D, et continues de D dans lui-même .

Les transposées topologiques $\lambda_* = (\overline{\lambda})^*$ des restrictions $\overline{\lambda}$ à D sont alors des applications linéaires de D' dans lui-même .

Definition :

Nous appellerons " famille duale " Λ_* associée à une famille Sobolev Λ , de base $D'_{\mathfrak{S}}$, et D-invariante, l'ensemble Λ_* des transposées topologiques λ_* des restrictions à D des éléments λ de Λ .

Pour une $\mathfrak{S}$-topologie quelconque de D' , les λ_* ne sont pas nécessairement continus ; le théorème 1 fournit directement un critère de continuité, et le corollaire 1 montre la continuité des λ_* pour la topologie de dual faible de D', resp. de Mackey, resp. de dual fort .

Definition :

Nous dirons qu'une famille de Sobolev Λ, de base $D'_{\mathfrak{S}}$, D-invariante, vérifie la condition de dualité relative à la $\mathfrak{S}$-topologie de $D'_{\mathfrak{S}}$ (ou plus simplement, que la condition de Λ-dualité est vérifiée) si tous les $\lambda_* \in \Lambda_*$ sont continus .

-94-

Il s'ensuit que la condition de Λ-dualité est la condition caractéristique pour que la famille duale Λ_* soit une famille de Sobolev de base $D'_{\mathfrak{S}}$; nous la supposerons désormais vérifiée .

Etudions maintenant plus en détail les liens qui existent entre Λ et Λ_* ; nous allons ainsi caractériser les homomorphismes projectif et inductif de Sobolev associés à Λ_* à l'aide de ceux associés à Λ . Pour cela, nous aurons besoin du résultat classique suivant (cf. Schaefer chap. 4 ou Grothendieck chap. 4) :

Proposition 1 : Caractérisation algébrique des duals topologiques des produits et sommes directes .

Soit $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'e.l.c. . Le dual topologique du produit vectoriel topologique $\prod_\lambda E_\lambda$ (resp. de la somme directe topologique $\oplus_\lambda E_\lambda$) est algébriquement isomorphe à la somme directe (resp. au produit) des duals respectifs E'_λ , soit :

$$\left(\prod_\lambda E_\lambda\right)' = \oplus_\lambda E'_\lambda \quad \text{et} \quad \left(\oplus_\lambda E_\lambda\right)' = \prod_\lambda E'_\lambda$$

De façon précise, nous avons les isomorphismes algébriques suivants :

$$\chi : \left| \begin{array}{l} \oplus_\lambda E'_\lambda \longrightarrow \left(\prod_\lambda E_\lambda\right)' \\ \oplus_\lambda x'_\lambda \longrightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} x'_\lambda \circ \pi_\lambda \end{array} \right.$$

$$\text{et } \psi : \left| \begin{array}{l} \prod_\lambda E'_\lambda \longrightarrow \left(\oplus_\lambda E_\lambda\right)' \\ (y'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \longrightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} y'_\lambda \circ \hat{\pi}_\lambda \end{array} \right.$$

où π_λ est la projection canonique, et $\hat{\pi}_\lambda$ la restriction de π_λ à $\oplus_\lambda E_\lambda$; les formes bilinéaires de dualité associées seront donc respectivement :

$$\beta_\pi : \quad \langle \oplus_\lambda x'_\lambda , (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x'_\lambda , x_\lambda \rangle$$

$$\beta_\oplus : \quad \langle (y'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} , \oplus_\lambda y_\lambda \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle y'_\lambda , y_\lambda \rangle$$

* -95-

* **Theoreme 2 :** CARACTERISATION DES HOMOMORPHISMES - DUALS DE SOBOLEV .

Soient Λ une famille de Sobolev D-invariante, de base $D'_{\mathfrak{S}}$, et Λ_* la famille duale associée à Λ . On suppose que la condition de Λ-dualité est vérifiée .

Alors l'homomorphisme projectif h_{Λ_*} (resp. inductif k_{Λ_*}) associé à la famille de Sobolev Λ_* , s'identifie, dans l'isomorphisme algébrique $D'^{\Lambda} = (\underrightarrow{D^{(\Lambda)}})'$ (resp. $D'^{(\Lambda)} = (\underleftarrow{D^{\Lambda}})'$) , avec la transposée topologique de l'homomorphisme $\overline{k}_{\Lambda}$ (resp. $\overline{h}_{\Lambda}$) associé à D, considéré comme espace inductif $\underrightarrow{K(\Lambda ; D)}$ (resp. comme espace projectif $\underleftarrow{H(\Lambda ; D)}$) .

Dans les identifications respectives, nous écrirons donc :

$$h_{\Lambda_*} = (\overline{k}_{\Lambda})^* \quad \text{et} \quad k_{\Lambda_*} = (\overline{h}_{\Lambda})^*$$

Nous résumerons (abusivement) ce résultat en disant que l'homomorphisme projectif dual est la transposée topologique de l'homomorphisme inductif , et l'homomorphisme inductif dual, transposée de l'homomorphisme projectif .

Démonstration :

(les notations utilisées, comme dans tout le chapitre III sont celles définies au chapitre II, parag.2 section E) .

D'après la proposition 1, tout élément $x' \in (\underrightarrow{D^{(\Lambda)}})'$ est image par l'isomorphisme algébrique Ψ d'une famille unique $(x'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in D'^{\Lambda}$ telle que nous ayons, pour tout élément $\oplus_\lambda x_\lambda \in D^{(\Lambda)}$, les égalités :

$$x'(\oplus_\lambda x_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x'_\lambda , x_\lambda \rangle_{(D', D)} = \langle (x'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \oplus_\lambda x_\lambda \rangle_{(D'^{\Lambda}, D^{(\Lambda)})} ;$$

et tout élément $y' \in (\underleftarrow{D^{\Lambda}})'$ est image par l'isomorphisme algébrique χ d'une famille presque nulle, unique $\oplus_\lambda y'_\lambda \in D'^{(\Lambda)}$, telle que nous ayons pour tout élément $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in D^{\Lambda}$, les égalités :

$$y'((y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle y'_\lambda, y_\lambda \rangle_{(D', D)} = \langle \oplus_\lambda y'_\lambda, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \rangle_{(D'^{(\Lambda)}, D^{\Lambda})}$$

-96-

Considérons donc l'homomorphisme $\bar{k}_\Lambda$ et sa transposée :

$$\bar{k}_\Lambda : \left| \begin{array}{ccc} D^{(\Lambda)} & \longrightarrow & D \\ \oplus_\lambda x_\lambda & \longrightarrow & \sum_{\lambda\in\Lambda} \bar{\lambda}(x_\lambda) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (\bar{k}_\Lambda)^* : \left| \begin{array}{ccc} D' & \longrightarrow & (D^{(\Lambda)})' \\ x' & \longrightarrow & x' \circ \bar{k}_\Lambda \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x' \in D'$, et tout $\oplus_\lambda x_\lambda \in D^{(\Lambda)}$, nous avons :

$$x' \circ \bar{k}_\Lambda(\oplus_\lambda x_\lambda) = x'\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} \bar{\lambda}(x_\lambda)\Big) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x', \bar{\lambda}(x_\lambda)\rangle_{\langle D', D\rangle}$$

ce qui nous donne, par définition de la transposée de $\bar{\lambda} \in \Lambda$:

$$x' \circ \bar{k}_\Lambda(\oplus_\lambda x_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle (\bar{\lambda})^*(x'), x_\lambda\rangle_{\langle D', D\rangle} = \langle (\lambda_*(x'))_{\lambda\in\Lambda}, \oplus_\lambda x_\lambda\rangle_{\langle D'^{\Lambda}, D^{(\Lambda)}\rangle}$$

d'où le résultat, puisque $(\lambda_*(x'))_{\lambda\in\Lambda}$ n'est autre que $h_{\Lambda_*}(x')$ par définition de Λ_* .

De même, prenons l'homomorphisme $\bar{h}_\Lambda$ et sa transposée :

$$\bar{h}_\Lambda : \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D^\Lambda \\ x & \longrightarrow & (\bar{\lambda}(x))_{\lambda\in\Lambda} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (\bar{h}_\Lambda)^* : \left| \begin{array}{ccc} (D^\Lambda)' & \longrightarrow & D' \\ y' & \longrightarrow & y' \circ \bar{h}_\Lambda \end{array} \right.$$

nous aurons de la même façon, pour tout $y' \in (D^\Lambda)'$ et tout $x \in D$:

$$y' \circ \bar{h}_\Lambda(x) = y'((\bar{\lambda}(x))_{\lambda\in\Lambda}) = \langle \oplus_\lambda y'_\lambda, (\bar{\lambda}(x))_{\lambda\in\Lambda}\rangle_{\langle D'^{(\Lambda)}, D^\Lambda\rangle}$$

$$= \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle y'_\lambda, \bar{\lambda}(x)\rangle_{\langle D', D\rangle} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle (\bar{\lambda})^*(y'_\lambda), x\rangle_{\langle D', D\rangle}$$

$$= \Big\langle \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda_*(y'_\lambda), x\Big\rangle_{\langle D', D\rangle} = \langle k_{\Lambda_*}(\oplus_\lambda y'_\lambda), x\rangle_{\langle D', D\rangle}$$

c.q.f.d. *

Proposition 2 : Transposées topologiques des injections et projections canoniques .

Sous les hypothèses du théorème 2, les transposées topologiques des injections canoniques $\bar{j}_\lambda$ associées à $D^{(\Lambda)}$ (resp. projections canoniques $\bar{\pi}_\lambda$ associées à D^Λ) ne sont autres que les projections canoniques π_λ associées à D'^Λ (resp. injections canoniques j_λ associées à $D'^{(\Lambda)}$), soit :

$$(\forall \lambda \in \Lambda)\,((\bar{\pi}_\lambda)^* = j_\lambda) \text{ et } ((\bar{j}_\lambda)^* = \pi_\lambda) .$$

- 97 -

Tout élément $y' \in (\underrightarrow{D}^{(\Lambda)})'$ est image par l'isomorphisme algébrique ψ d'un élément $(y'_\mu)_{\mu\in\Lambda} \in D'^{\Lambda}$, d'où, pour tout $\lambda\in\Lambda$ et tout $x\in D$:

$$\langle (\bar{j}_\lambda)^*(y'), x\rangle_{\langle D',D\rangle} = y'\circ\bar{j}_\lambda(x) = \langle (y'_\mu)_{\mu\in\Lambda}, \bigoplus_{\mu\in\Lambda} \delta_{\lambda\mu} x\rangle_{\langle D'^{\Lambda}, D^{(\Lambda)}\rangle}$$

$$= \langle y'_\lambda, x\rangle_{\langle D',D\rangle} = \langle \pi_\lambda((y'_\mu)_{\mu\in\Lambda}), x\rangle_{\langle D',D\rangle}$$

d'où la première assertion.

De même, pour tout $\lambda\in\Lambda$, et tout $x'\in D'$, nous avons : $(\bar{\pi}_\lambda)^*(x') = x'\circ\bar{\pi}_\lambda$; dans l'isomorphisme $(\underleftarrow{D}^{\Lambda})' = D'^{(\Lambda)}$, nous aurons pour tout $(x_\mu)_{\mu\in\Lambda} \in D^{\Lambda}$:

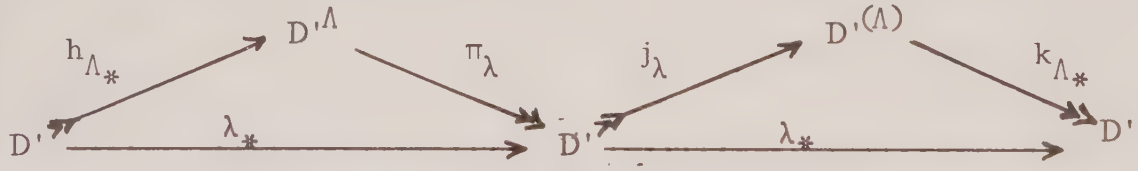
$$x'\circ\bar{\pi}_\lambda((x_\mu)_{\mu\in\Lambda}) = \langle x', x_\lambda\rangle_{\langle D',D\rangle} = \langle \bigoplus_\mu \delta_{\lambda\mu} x', (x_\mu)_{\mu\in\Lambda}\rangle_{\langle D'^{(\Lambda)}, D^{\Lambda}\rangle}$$

d'où le résultat puisque $j_\lambda(x') = \bigoplus_\mu \delta_{\lambda\mu} x'$.

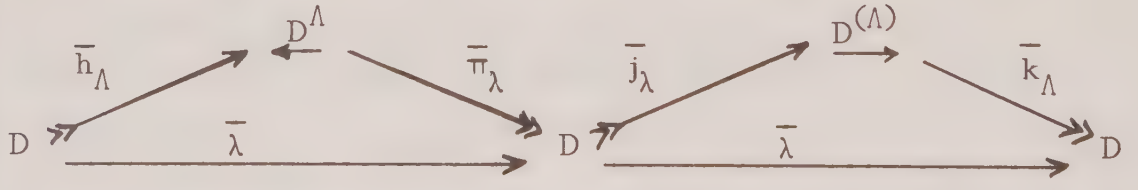
*

Proposition 3 :

Le diagramme linéaire:



est transposé topologique du diagramme vectoriel-topologique :



;

si de plus, on munit D' d'une $\mathfrak{S}$-topologie pour laquelle la condition de Λ-dualité est vérifiée, et D'^{Λ} (resp. $D'^{(\Lambda)}$) de la topologie produit (resp. somme directe) associée, le diagramme est vectoriel-topologique.

(On rappelle que la flèche $\rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow$ (resp. $\longrightarrow$, resp. $\dashrightarrow$) symbolise les applications injectives (resp. surjectives, resp. homomorphismes

- 98 -

La première assertion est une conséquence immédiate de la proposition précédente, et du théorème 2 ; la seconde résulte de la condition de Λ-dualité, ainsi que de la propriété universelle des limites projectives et inductives (cf. chap.1 th.1 et 1 bis).

*

EXEMPLES DE FAMILLES DE SOBOLEV DUALES :

Considérons les familles de Sobolev données en exemple au chapitre II, dans le cadre des distributions. Nous avons déjà signalé (cf.chap. II, parag.2, section D) que si la famille de Sobolev Λ est composée de l'identité et de polynomes de dérivation à coefficients dans $\mathcal{E}(\Omega)$, les restrictions de ces polynomes à $\mathcal{D}(\Omega)$ coïncident avec les polynomes de dérivation dans $\mathcal{D}(\Omega)$ correspondants, qui sont alors des opérateurs continus de $\mathcal{D}(\Omega)$ (cf. Trèves, chap. 23).

Les familles Λ_m, Λ_∞, $\Lambda_{\rho,m}$, $\Lambda_{x,\infty}$ sont donc $\mathcal{D}(\Omega)$-invariantes; $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant muni de la topologie de dual fort, la condition de Λ-dualité est vérifiée (cf. th.1 corol.1) ; les familles duales sont donc des familles de Sobolev ; ce sont respectivement :

$(\Lambda_m)_* = \{(-1)^{|\alpha|} D^\alpha : |\alpha| \leq m\}$ analogue à Λ_m, et de même pour Λ_∞ ;

$(\Lambda_{\rho,m})_* = \{[x' \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\rho^\alpha x')] : |\alpha| \leq m\}$ analogue à $\Lambda_{\rho,-m}$

et de même pour $\Lambda_{x,\infty}$.

Si nous avons affaire à une famille de convolution

$$\Lambda_{A'} = \{(x' \longrightarrow a' * x') \ : \ a' \in A'\}$$

où A' est une partie de $\mathcal{E}'(\Omega)$ contenant la mesure de Dirac à l'origine, la famille est D-invariante, et

$$(\Lambda_{A'})_* = \{(x' \longrightarrow \check{a}' * x') \ : \ a' \in A'\}$$

où $\check{a}'$ est la distribution $\varphi \longrightarrow \langle a', \check{\varphi}\rangle$ avec $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$
(cf. Trèves chap.27)

Enfin, dans le cadre des distributions tempérées $S'(\mathbb{R}^n)$, si la famille de Sobolev Λ fait intervenir la transformation de Fourier, l'élément correspondant de la famille duale est encore la transformation de Fourier, qui est un opérateur symétrique (cf.Trèves,chap.30).

* - 99 -

B : SYSTEME DE SOBOLEV D-NORMAL, ET SYSTEME DUAL ASSOCIE.

Soient Λ une famille de Sobolev D-invariante, de base $D'_{\mathfrak{S}}$, et Λ_* la famille duale associée ; on supposera que la condition de Λ-dualité est vérifiée .

Definitions :

Nous appellerons " espace D-normal " tout e.l.c. E intermédiaire (i.e. tel que l'on ait : $D \underset{\varphi}{\prec} E \prec D'_{\mathfrak{S}}$) tel que $\varphi(D)$ soit dense dans E, et " système de Sobolev D-normal " $\Sigma(\Lambda) = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ tout système de Sobolev intermédiaire (i.e. $\Sigma_o(\Lambda) \prec \Sigma(\Lambda) \prec \Sigma'_o(\Lambda)$) associé à une famille de Sobolev Λ D-invariante vérifiant la condition de Λ-dualité, et pour lequel chaque espace E_λ est D-normal .

Conformément au double-diagramme de base d'un système intermédiaire (cf. chap.II parag.2 section E), notons, pour tout $\lambda\in\Lambda$, φ_λ , l'injection de D dans E_λ. Dire que le système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ est D-normal entraîne alors que les transposées topologiques φ^*_λ sont injectives (cf. Trèves chap. 23) .

Definition :

Supposons que pour tout $\lambda\in\Lambda$, soit donnée sur le dual topologique E'_λ une $\mathfrak{S}_\lambda$- topologie . Nous dirons alors que le système de Sobolev $\Sigma(\Lambda)$ vérifie la condition de dualité relative aux $\mathfrak{S}_\lambda$-topologies et à la $\mathfrak{S}$-topologie (ou, plus simplement, que la condition de $\Sigma(\Lambda)$-dualité est vérifiée) si pour tout $\lambda\in\Lambda$, les φ^*_λ sont continues de $E'_{\lambda,\mathfrak{S}_\lambda}$ dans $D'_{\mathfrak{S}}$.

Remarque :

Le critère de continuité de la transposée topologique (th.1) donne immédiatement une caractérisation de la condition de $\Sigma(\Lambda)$-dualité :

$$(\forall\lambda\in\Lambda)\ (\forall A\in\mathfrak{S})\ (\exists B_\lambda\in\mathfrak{S}_\lambda) : (\varphi_\lambda(A)\subset B^{\circ\circ}_\lambda) \quad ;$$

en particulier, si nous prenons comme $\mathfrak{S}_\lambda$ - topologies les topologies de dual faible $\sigma(E'_\lambda,E_\lambda)$ (resp. de Mackey $\tau(E'_\lambda,E_\lambda)$, resp. de dual fort $\beta(E'_\lambda,E_\lambda)$) et pour $\mathfrak{S}$-topologie la topologie de dual faible $\sigma(D',D)$ (resp. $\tau(D',D)$, resp. $\beta(D',D)$), la condition de $\Sigma(\Lambda)$-dualité est vérifiée.

Il est évident que cette condition n'est pas toujours vérifiée ; il suffit de considérer le système $\Sigma(Id) = (Id, D')$; l'identité de D' n'est pas continue de D'_β dans D'_σ .

D'autre part, la condition de $\Sigma(\Lambda)$ - dualité entraîne ipso facto que les $E'_{\lambda,\mathfrak{S}_\lambda}$ sont inclus topologiquement dans $D'_{\mathfrak{S}}$; nous pouvons donc poser la définition suivante :

Definition :

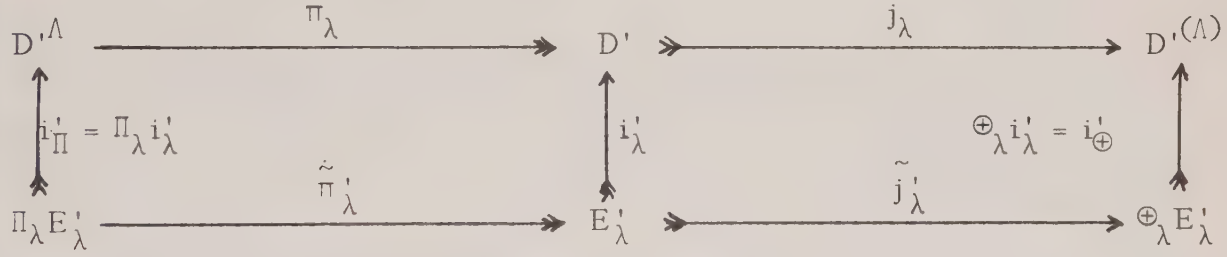
Soit $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev D-normal vérifiant la condition de $\Sigma(\Lambda)$-dualité pour une famille de $\mathfrak{S}_\lambda$ - , $\mathfrak{S}$-topologies . Nous appellerons " système dual associé à $\Sigma(\Lambda)$ " le système de Sobolev :

$$\Sigma(\Lambda_*) = (\Lambda_*, h_{\Lambda_*} . k_{\Lambda_*}, (E'_{\lambda,\mathfrak{S}_\lambda})_{\lambda\in\Lambda})$$

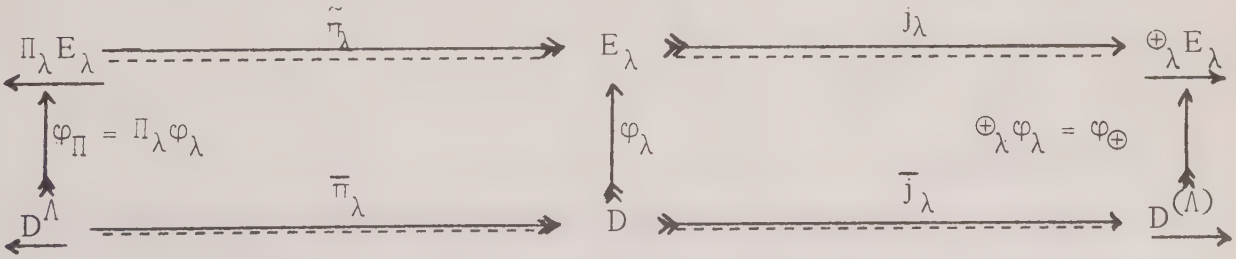
associé à la famille de Sobolev Λ_* de base $D'_{\mathfrak{S}}$, où les $E'_{\lambda,\mathfrak{S}_\lambda}$ sont inclus topologiquement dans $D'_{\mathfrak{S}}$ par les injections canoniques : $i'_\lambda = \varphi^*_\lambda$.

Proposition 4 :

Le diagramme linéaire :



s'identifie dans les isomorphismes de la proposition 1 , au transposé topologique du diagramme vectoriel topologique :



Plus précisément, nous avons les égalités :

- $\pi_\lambda = (\bar{j}_\lambda)^*$, $j_\lambda = (\bar{\pi}_\lambda)^*$, $\tilde{\pi}'_\lambda = (\tilde{j}_\lambda)^*$, $\tilde{j}'_\lambda = (\tilde{\pi}_\lambda)^*$;
- $i'_\lambda = \varphi^*_\lambda$ par définition , $\Pi_\lambda i'_\lambda = (\oplus_\lambda \varphi_\lambda)^*$, $\oplus_\lambda i'_\lambda = (\Pi_\lambda \varphi_\lambda)^*$.

-101-

Nous avons déjà démontré, lors de la proposition 3, les égalités :

$$(\overline{\pi}_\lambda)^* = j_\lambda \quad \text{et} \quad (\overline{j}_\lambda)^* = \pi_\lambda \quad .$$

De la même façon, on démontre que $(\tilde{\pi}_\lambda)^* = \tilde{j}'_\lambda$ et $(\tilde{j}_\lambda)^* = \tilde{\pi}'_\lambda$; montrons maintenant l'égalité : $\Pi_\lambda \varphi_\lambda^* = (\oplus_\lambda \varphi_\lambda)^*$.

Par définition, $\Pi_\lambda \varphi_\lambda^*$ est l'application : $\left| \begin{array}{l} \Pi_\lambda E'_\lambda \longrightarrow D'^{\Lambda} \\ (x'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \longrightarrow (\varphi_\lambda^*(x'_\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \end{array} \right.$

alors, dans l'isomorphisme algébrique $D'^{\Lambda} = (\underrightarrow{D^{(\Lambda)}})'$, nous avons, pour tout élément $(x'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \Pi_\lambda E'_\lambda$ et tout élément $\oplus_\lambda x_\lambda \in D^{(\Lambda)}$, les égalités :

$$\langle (\varphi_\lambda^*(x'_\lambda))_{\lambda\in\Lambda} , \oplus_\lambda x_\lambda \rangle_{\langle D'^{\Lambda}, D^{(\Lambda)}\rangle} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle \varphi_\lambda^*(x'_\lambda), x_\lambda \rangle_{\langle D', D\rangle}$$

$$= \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x'_\lambda, \varphi_\lambda(x_\lambda) \rangle_{\langle E'_\lambda, E_\lambda\rangle} = \langle (x'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} , \oplus_\lambda \varphi_\lambda(x_\lambda) \rangle_{\langle \Pi_\lambda E'_\lambda, \oplus_\lambda E_\lambda \rangle}$$

puis, compte-tenu de l'isomorphisme algébrique $(\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda})' = \Pi_\lambda E'_\lambda$:

$$\langle (x'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} , (\oplus_\lambda \varphi_\lambda)(\oplus_\lambda x_\lambda) \rangle_{\langle \Pi_\lambda E'_\lambda, \oplus_\lambda E_\lambda\rangle} = \langle (\oplus_\lambda \varphi_\lambda)^*((x'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}), \oplus_\lambda x_\lambda \rangle_{\langle D'^{\Lambda}, D^{(\Lambda)}\rangle}$$

c.q.f.d.

On montrerait de la même façon, grâce aux isomorphismes algébriques $D^{(\Lambda)} = (\underleftarrow{D^{\Lambda}})'$ et $\oplus_\lambda E'_\lambda = (\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda})'$ l'égalité duale : $\oplus_\lambda \varphi_\lambda^* = (\Pi_\lambda \varphi_\lambda)^*$.

*

Remarquons d'autre part que puisque les applications $i'_\lambda = \varphi_\lambda^*$ sont des injections, les applications $(\oplus_\lambda \varphi_\lambda)^* = \Pi_\lambda i'_\lambda$ et $(\Pi_\lambda \varphi_\lambda)^* = \oplus_\lambda i'_\lambda$ en sont aussi ; nous aurons donc le corollaire suivant, que nous utiliserons par la suite :

Corollaire :

Dans les hypothèses précédentes, D^{Λ} est dense dans $\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}$ et $D^{(\Lambda)}$ dense dans $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$.

* -102-

III.3 : ESPACES DE SOBOLEV DE TYPE DUAL : $\underset{\leftarrow *}{H}$ et $\underset{*\rightarrow}{K}$.

Puisqu'à tout système de Sobolev D-normal $\Sigma(\Lambda)$, pour lequel la condition de $\Sigma(\Lambda)$-dualité est vérifiée, on peut associer un système de Sobolev dual $\Sigma(\Lambda_*)$, nous pouvons considérer les espaces de Sobolev projectif et inductif associés à ce système .

Definition :

Nous appellerons " espaces de Sobolev de type dual " les espaces $\underset{\leftarrow *}{H} = \underset{\leftarrow}{H}(\Lambda_*; E'_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)$ et $\underset{*\rightarrow}{K} = \underset{\rightarrow}{K}(\Lambda_*; E'_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)$ resp. espaces projectif et inductif associés à $\Sigma(\Lambda_*)$.

Nous aurons donc (cf. chap.II, parag.1, section B) :

$$H_* = h_{\Lambda_*}^{-1}(\Pi_\lambda E'_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \lambda_*^{-1}(E'_\lambda)$$

$$\underset{\leftarrow *}{H} = \underset{\leftarrow}{\lim}\,(\tilde{h}_{\Lambda_*}\,;\ \underset{\leftarrow}{\Pi_\lambda E'_\lambda, \mathcal{E}_\lambda}) = \underset{\lambda\in\Lambda}{\underset{\leftarrow}{\lim}}\,({}_\lambda H_*\,;\ E'_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)$$

où h_{Λ_*} est l'homomorphisme projectif associé à la famille duale Λ_*, $\tilde{h}_{\Lambda_*}$ sa restriction à H_*, considérée à valeurs dans le produit des E'_λ, et ${}_\lambda H_*$ la restriction à H_* de chaque $\lambda\in\Lambda$, considérée à valeurs dans l'espace E'_λ correspondant ; de même :

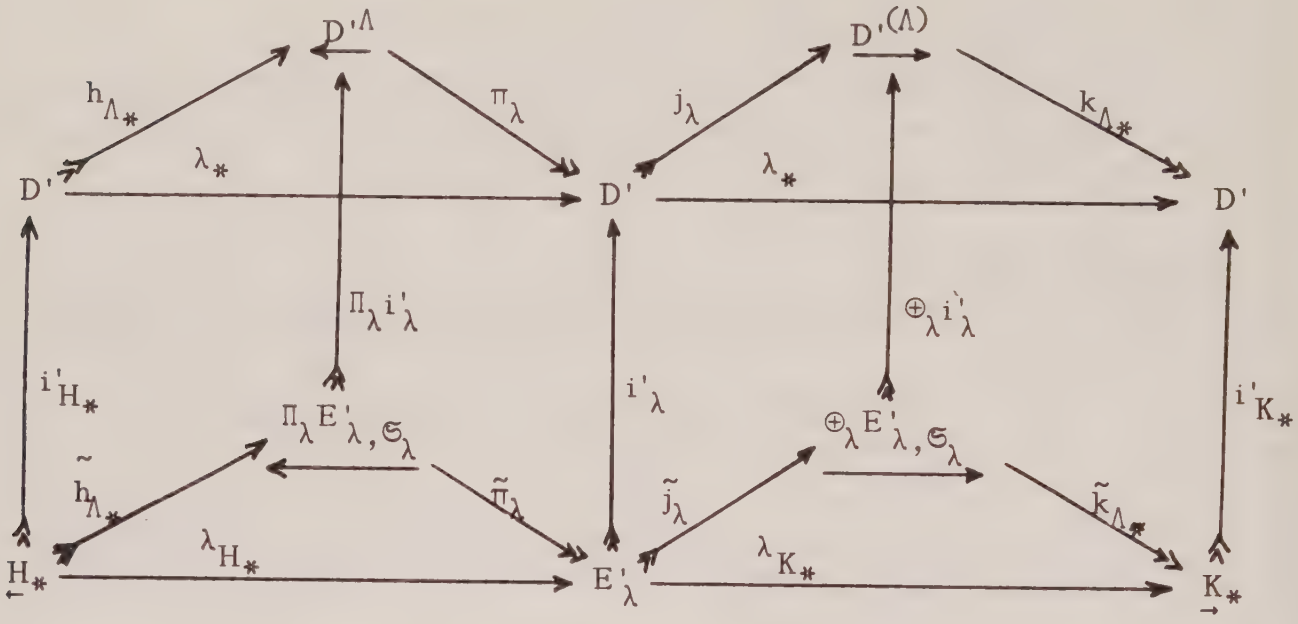
$$K_* = k_{\Lambda_*}(\oplus_\lambda E'_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda_*(E'_\lambda)$$

$$\underset{*\rightarrow}{K} = \underset{\rightarrow}{\lim}\,(\tilde{k}_{\Lambda_*}\,;\ \underset{\rightarrow}{\oplus_\lambda E'_\lambda, \mathcal{E}_\lambda}) = \underset{\lambda\in\Lambda}{\underset{\rightarrow}{\lim}}\,({}_\lambda K_*\,;\ E'_\lambda, \mathcal{E}_\lambda)$$

où k_{Λ_*} est l'homomorphisme inductif associé à la famille duale Λ_*, $\tilde{k}_{\Lambda_*}$ sa restriction à la somme directe des E'_λ, considérée à valeurs dans K_*, et ${}_\lambda K_*$ la restriction de chaque $\lambda\in\Lambda$ à l'espace E_λ correspondant, considérée à valeurs dans K_* .

* -103-

Nous pouvons maintenant considérer le diagramme de base du système de Sobolev dual (cf. chap.II, parag.2, section E) :



compte-tenu de la proposition 4 .

Remarquons que ceci nécessite une identification algébrique : c'est l'identification algébrique de chaque E_λ et de son image $i_\lambda(E_\lambda)$ munie de la topologie transportée, qui nous avait permis de considérer E_λ comme sous-espace vectoriel de D', muni de sa topologie propre, et de définir ainsi les espaces de Sobolev (cf. chap.II, parag.1, section B) ; de même, nous utilisons ici l'identification algébrique de E_λ et $\varphi_\lambda{}^*(E'_\lambda)$ muni de la topologie transportée.

Or $\varphi_\lambda{}^*$ est l'opération de restriction à D des formes linéaires continues sur E_λ ; $\varphi_\lambda{}^*(E'_\lambda)$ est donc le dual topologique D'_λ de D_λ, sous-espace vectoriel D de E_λ muni de la topologie induite ; et comme D est dense dans E'_λ, D'_λ est algébriquement isomorphe à E'_λ .

Nous allons maintenant caractériser algébriquement les espaces de Sobolev de type dual, comme duals d'espaces de Sobolev particuliers ; ce résultat nous permettra ultérieurement d'étudier la dualité des espaces de Sobolev associés à des systèmes D-normaux .

* -104-

* **Theoreme 3 :** CARACTERISATION ALGEBRIQUE DES ESPACES H_* ET K_* .

Soient $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev D-normal vérifiant la condition de $\Sigma(\Lambda)$-dualité, $\Sigma(\Lambda_*)$ le système dual associé, $\overleftarrow{H_*}$ et $\overrightarrow{K_*}$ les espaces projectif et inductif associés à $\Sigma(\Lambda_*)$.

Les espaces H_* et K_* sont les duals topologiques respectifs des espaces inductif et projectif associés au système de Sobolev :

$$\Sigma_1(\Lambda) = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (D_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$$

où D_λ désigne l'espace vectoriel D muni de la topologie induite par E_λ . Nous aurons donc :

$$H_* = \left(\overrightarrow{K(\Lambda ; D_\lambda)} \right)' \qquad \text{et} \qquad K_* = \left(\overleftarrow{H(\Lambda ; D_\lambda)} \right)'$$

Pour simplifier l'exposé, nous noterons désormais $\overleftarrow{D_H}$ l'espace projectif $\overleftarrow{H(\Lambda;D_\lambda)}$ et $\overrightarrow{D_K}$ l'espace inductif $\overrightarrow{K(\Lambda;D_\lambda)}$.

1° : caractérisation de H_* .

D'après la remarque qui précède le théorème, H_* est l'ensemble des formes linéaires continues sur D dont l'image par h_{Λ^*} appartient au produit des duals topologiques D'_λ des D_λ . Or, d'après le théorème de caractérisation des homomorphismes duals (th.2), h_{Λ_*} est la transposée topologique de $\overline{k}_\Lambda$, considéré comme application linéaire continue de $\overrightarrow{D^{(\Lambda)}}$ dans D muni de sa topologie propre. Nous avons donc :

$$H_* = \{ x' \in D' : x' \circ \overline{k}_\Lambda \in \Pi_\lambda D'_\lambda \} \quad .$$

D'autre part, $\overrightarrow{D_K} = \overrightarrow{K(\Lambda ; D_\lambda)}$ est limite inductive de $\overrightarrow{\oplus_\lambda D_\lambda}$ par l'application $\overline{k}_\Lambda$; d'après la propriété universelle des limites inductives (cf. chap. I, th.1 bis), une forme linéaire y' sur D est donc continue sur $\overrightarrow{D_K}$ si et seulement si $y' \circ \overline{k}_\Lambda$ est une forme linéaire continue sur $\overrightarrow{\oplus_\lambda D_\lambda}$. Puisque $\Pi_\lambda D'_\lambda$ s'identifie algébriquement au dual topologique de la somme directe topologique des D_λ (cf. propos.1), D'_K est l'ensemble des formes linéaires y' sur D telles que $y' \circ \overline{k}_\Lambda$ appartienne à $\Pi_\lambda D'_\lambda$; et par conséquent H_* est contenu dans D'_K .

Inversement, les inclusions vectorielles -topologiques $D < D_\lambda$ pour tout $\lambda\in\Lambda$ entraînent par définition l'inclusion des systèmes de Sobolev : $\Sigma_o(\Lambda) < \Sigma_1(\Lambda)$ (cf. chap.II, parag.2, section B) ; et le théorème de conservation de l'inclusion vectorielle - topologique (cf. chap.II, th.4) entraîne celle

* -105-

des espaces inductifs respectifs :

$$D = \varinjlim K(\Lambda ; D) \prec \varinjlim K(\Lambda ; D_\lambda) = \varinjlim D_K \quad ;$$

par conséquent toute forme linéaire continue sur $\varinjlim D_K$ est continue sur D, et D'_K est ainsi contenu dans H_*.

2° : <u>caractérisation de</u> K_* .

K_* est par définition l'ensemble des images par k_{Λ_*} des éléments de $\oplus_\lambda D'_\lambda$; comme k_{Λ_*} est, d'après le théorème 2, la transposée topologique $\overline{h}_\Lambda$, considéré comme application linéaire continue de D muni de sa topologie propre, dans $\varprojlim D^\Lambda$, et comme $\oplus_\lambda D'_\lambda$ s'identifie, d'après la proposition 1, au dual topologique de $\varprojlim D_\lambda$, nous avons :

$$K_* = \{ x' \circ \overline{h}_\Lambda : x' \in (\varprojlim D_\lambda)' \}$$

D'autre part, $\overline{h}_\Lambda$ est une application linéaire continue de $\varprojlim D_H$ dans $\varprojlim D_\lambda$; si x' appartient à $(\varprojlim D_\lambda)'$, $x' \circ \overline{h}_\Lambda$ est donc continue, et K_* est contenu dans K'_H.

Inversement, puisque $\overline{h}_\Lambda$ est un homomorphisme injectif de $\varprojlim D_H$ dans $\varprojlim D_\lambda$, sa transposée topologique correspondante :

$$(\overline{h}_\Lambda)^*_H : (\varprojlim D_\lambda)' \longrightarrow D'_H$$

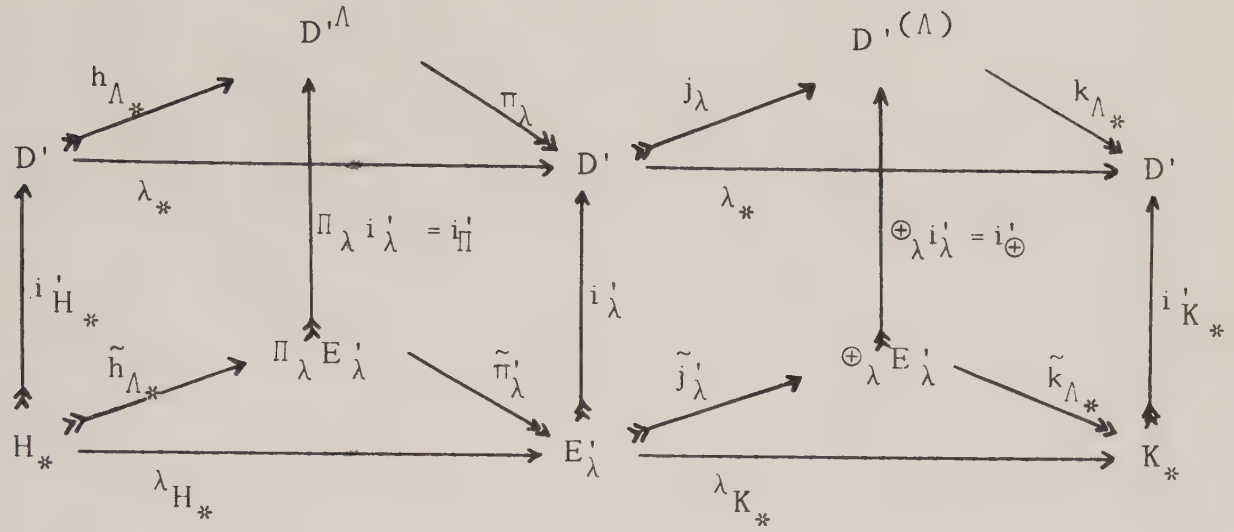
est surjective comme transposée topologique d'un homomorphisme injectif (par application directe du théorème de Hahn-Banach) ; toute forme linéaire continue y' sur $\varprojlim D_H$ s'écrit donc : $y' = (\overline{h}_\Lambda)^*_H (x') = x' \circ \overline{h}_\Lambda$ pour un certain $x' \in (\varprojlim D_\lambda)'$; D'_H est donc contenu dans K_* . *

* <u>Corollaire</u> : <u>Caractérisation algébrique du diagramme de base d'un système dual</u> .

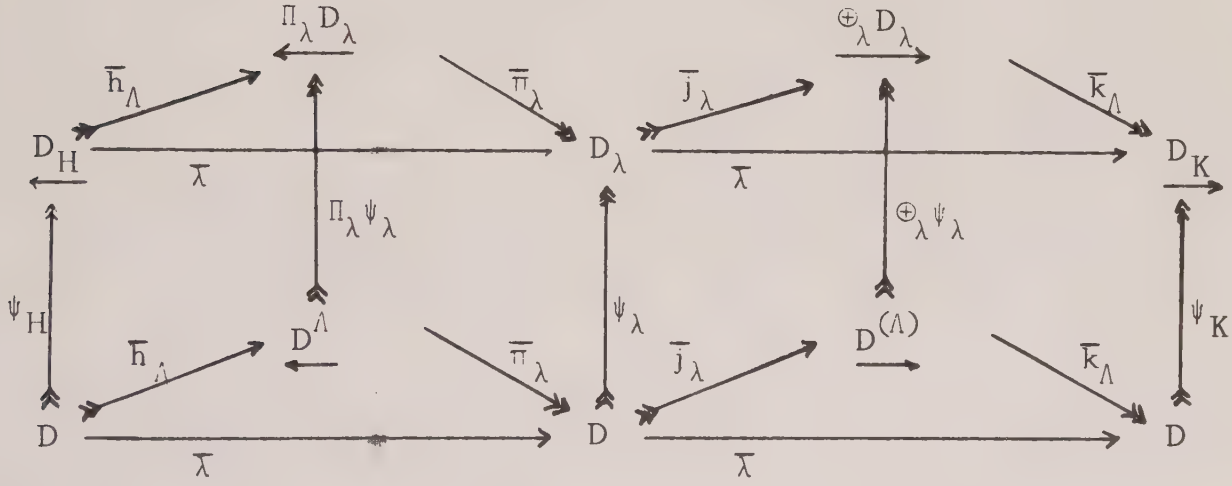
Du point de vue algébrique, le diagramme de base d'un système $\Sigma(\Lambda_*) = (\Lambda_*, h_{\Lambda_*}, k_{\Lambda_*}, (E'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ dual d'un système D - normal $\Sigma(\Lambda) = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$, est transposé topologique du " premier étage " du double-diagramme de base associé au système intermédiaire : $\Sigma_1(\Lambda) = (\Lambda, h_\Lambda, k_\Lambda, (D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ où D_λ est l' e.v.t. induit sur D par E_λ .

* -106-

Cela signifie que le diagramme linéaire :



est transposé topologique du diagramme vectoriel topologique :

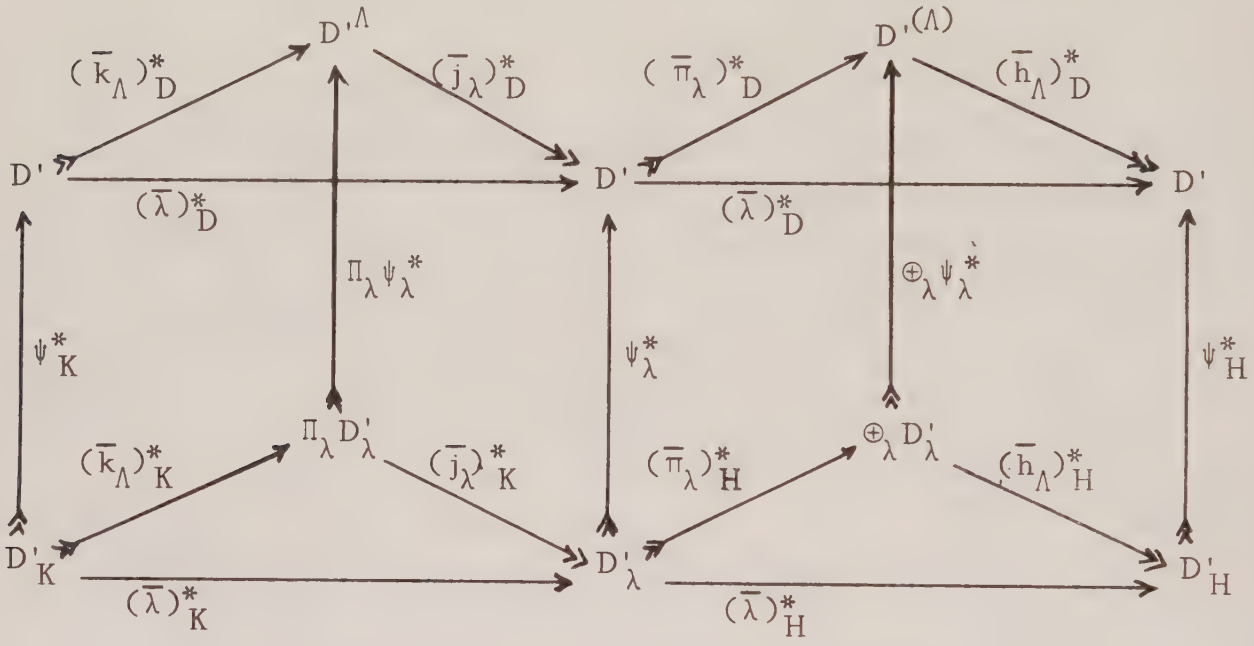


où ψ_λ (resp. ψ_H, ψ_K) désigne l'identité de D considérée comme application linéaire continue de D dans D_λ (resp. $\underleftarrow{D_H}$, $\underrightarrow{D_K}$).

-107-

Démonstration du corollaire :

Considérons en effet le diagramme transposé topologique du premier étage du diagramme de base associé à $\Sigma_1(\Lambda)$:



Comme $(\bar{\lambda})^*_D = \lambda_*$ par définition, on a : $(\bar{k}_\Lambda)^*_D = h_{\Lambda_*}$ et $(\bar{h}_\Lambda)^*_D = k_{\Lambda_*}$ en raison du théorème 2, et $(\bar{j}_\lambda)^*_D = \pi_\lambda$, $(\bar{\pi}_\lambda)^*_D = j_\lambda$ d'après la proposition 4 .

Dans l'identification algébrique de D'_λ avec E'_λ , $i'_\lambda = \varphi^*_\lambda$ s'identifie à ψ^*_λ, et nous aurons, toujours d'après la proposition 4 :

$i'_\Pi = \Pi_\lambda i'_\lambda = \Pi_\lambda \varphi^*_\lambda = \Pi_\lambda \psi^*_\lambda$ et $i'_\oplus = \oplus_\lambda i'_\lambda = \oplus_\lambda \varphi^*_\lambda = \oplus_\lambda \psi^*_\lambda$

En appliquant encore la proposition 4, mais cette fois au système $\Sigma_1(\Lambda)$, on en déduit que les $(\bar{j}_\lambda)^*_K$ (resp. $(\bar{\pi}_\lambda)^*_H$) sont les projections canoniques de $\Pi_\lambda D'_\lambda$ (resp. injections canoniques de $\oplus_\lambda D'_\lambda$) ; dans l'isomorphisme algébrique, elles s'identifient donc aux $\tilde{\pi}'_\lambda$ projections canoniques de $\Pi_\lambda E'_\lambda$ (resp. $\tilde{j}'_\lambda$ injections canoniques de $\oplus_\lambda E'_\lambda$) .

D'après le théorème 3, $D'_K = H_*$ et $D'_H = K_*$;
par conséquent ψ^*_K et ψ^*_H ne sont autres que les injections canoniques i'_{H_*} et i'_{K_*} de H_* et K_* dans D' . De plus, les égalités :

-108-

$$i'_{\Pi} \circ (\overline{k}_{\Lambda})^*_K = h_{\Lambda_*} \circ i'_{H_*} = i'_{\Pi} \circ \tilde{h}_{\Lambda_*}$$

(resp. $i'_{K_*} \circ (\overline{h}_{\Lambda})^*_H = k_{\Lambda_*} \circ i'_{\oplus} = i'_{K_*} \circ \tilde{k}_{\Lambda_*}$)

entraînent l'égalité $(\overline{k}_{\Lambda})^*_K = \tilde{h}_{\Lambda_*}$ (resp. $(\overline{h}_{\Lambda})^*_H = \tilde{k}_{\Lambda_*}$) du fait de l'injectivité de i'_{Π} (resp. i'_{K_*}) ; et de même :

$$i'_{\lambda} \circ (\overline{\lambda})^*_K = \lambda_* \circ i'_{H_*} = i'_{\lambda} \circ \lambda_{H_*}$$

(resp. $i'_{K_*} \circ (\overline{\lambda})^*_H = \lambda_* \circ i'_{\lambda} = i'_{K_*} \circ \lambda_{K_*}$)

entraînent $(\overline{\lambda})^*_K = \lambda_{H_*}$ (resp. $(\overline{\lambda})^*_H = \lambda_{K_*}$) du fait de l'injectivité de i'_{λ} (resp. i'_{K_*}) .

*

* -109-

III.4 : ETUDE ALGEBRIQUE DE LA DUALITE DES ESPACES DE SOBOLEV .

L'étude des espaces de type dual H_* et K_* , et de leur caractérisation algébrique (cf. th.3) est fondée sur le rôle que vont jouer ces espaces dans la dualité des espaces de Sobolev " de départ " : $\overleftarrow{H(\Lambda ; E_\lambda)}$ et $\overrightarrow{K(\Lambda ; E_\lambda)}$, comme nous allons le voir maintenant .

A : DUALITE POUR L'ESPACE PROJECTIF DE SOBOLEV $\overleftarrow{H(\Lambda ; E_\lambda)}$.

Le théorème que voici est la généralisation du théorème de dualité des espaces de Sobolev classiques, ainsi que des théorèmes analogues existant sur certains espaces de distributions auxquels s'applique notre théorie (cf. parag. 6) :

* **Theoreme 4** : CARACTERISATION ALGEBRIQUE DU DUAL DE LA FERMETURE H_o DE D DANS L'ESPACE PROJECTIF DE SOBOLEV .

Soient $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev D-normal, vérifiant la condition de $\Sigma(\Lambda)$-dualité, $\Sigma(\Lambda_*)$ le système dual associé, et K_* l'espace inductif de type dual correspondant .

K_* est algébriquement isomorphe au dual topologique de la fermeture H_o de D dans $\overleftarrow{H(\Lambda ; E_\lambda)}$, muni de la topologie induite .

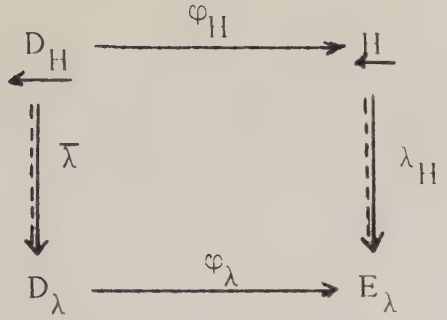
Démonstration :

Comme les duals topologiques d'un e.l.c. donné E et d'un sous-espace dense, muni de la topologie induite, coïncident, le théorème sera une conséquence du théorème 3, moyennant la proposition suivante :

Proposition 5 :

L'espace projectif de Sobolev $\overleftarrow{D_H} = \overleftarrow{H(\Lambda ; D_\lambda)}$ est sous-e.v.t. de l'espace projectif $\overleftarrow{H(\Lambda ; E_\lambda)}$.

-110-



Nous avons $H = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} ({}^{\lambda}_{H} ; E_\lambda)$ et $D_H = \varprojlim_{\lambda\in\Lambda} (\overline{\lambda} ; D_\lambda)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$, $D_\lambda = \varprojlim (\varphi_\lambda ; E_\lambda)$; comme de plus les applications φ_λ et φ_H sont injectives, la proposition résulte du premier théorème de transfert d'homomorphie (cf.chap.I, th.9).

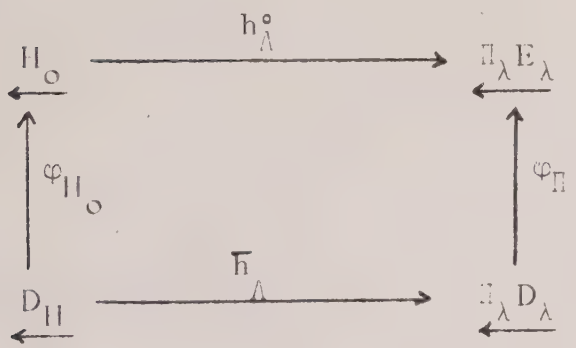
*

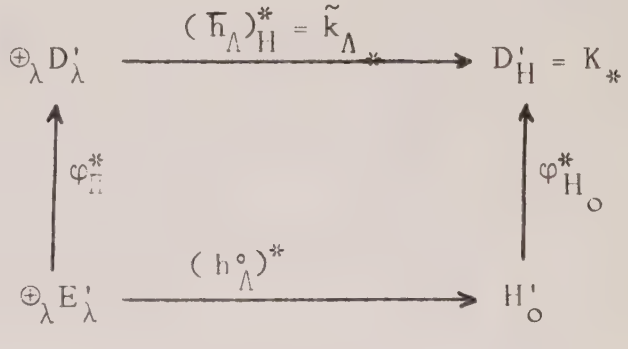
En ce qui concerne les homomorphismes de Sobolev, le théorème 4 aura la conséquence suivante :

Corollaire :

Dans les hypothèses du théorème, la transposée topologique de la restriction h°_Λ à H_o de l'homomorphisme projectif $\tilde{h}_\Lambda$, coïncide avec l'homomorphisme inductif de type dual $\tilde{k}_{\Lambda_*}$, dans l'identification algébrique de chaque E'_λ avec D'_λ, et de H'_o avec K_*.

Considérons en effet le diagramme transposé du diagramme vectoriel topologique :





Les injections denses φ_Π et φ_{H_o} sont des homomorphismes pour les topologies considérées, et par conséquent leurs transposées topologiques sont des bijections, à savoir celles qui identifient $\oplus_\lambda E'_\lambda$ avec $\oplus_\lambda D'_\lambda$, et H'_o avec K_*, et $(\overline{h}_\Lambda)^*_H = \tilde{k}_{\Lambda_*}$ d'après le corollaire du théorème 3.

*

-111-

Remarque :

H_o est en général distinct de H (cf. Trèves chap. 31 dans le cas de l'espace de Sobolev classique $H^{2,1}(\Omega)$) ; dans ce cas, on ne peut espérer caractériser le dual H' de $H(\Lambda ; E_\lambda)$ comme un espace inclus topologiquement dans D' ; en effet, la restriction à D de toute forme linéaire continue sur H est une forme linéaire continue sur D, mais inversement si x est un élément de $H - H_o$, il existe, d'après le théorème de Hahn-Banach, une infinité de formes linéaires continues sur H, non nulles en x, et nulles sur H_o, et par conséquent sur D .

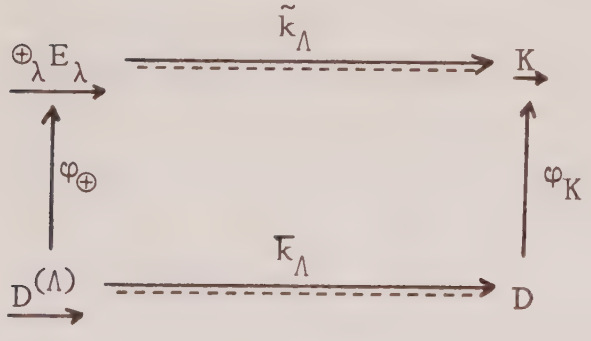
Nous verrons au paragraphe 6 des exemples d'application de la caractérisation du dual de H_o .

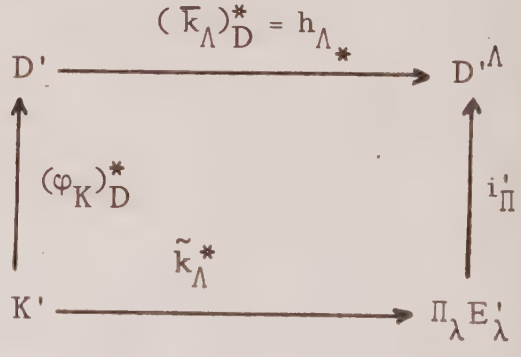
B : DUALITE POUR L'ESPACE INDUCTIF DE SOBOLEV $K(\Lambda ; E_\lambda)$.

Proposition 6 :

D est dense dans $K(\Lambda ; E_\lambda)$.

Considérons en effet le diagramme transposé topologique du diagramme vectoriel topologique : soit :





(cf. théorème 2 et proposition 4) .

$\varphi_K(D)$ est dense dans $K(\Lambda ; E_\lambda)$ si et seulement si φ^*_K est injective, ou encore, puisque h_{Λ_*} est injective, si et seulement si $h_{\Lambda_*} \circ \varphi^*_K$ est injective .

* -112-

Or $h_{\Lambda_*} \circ (\varphi_K)'_D = (\overline{k}_\Lambda)'_D \circ (\varphi_K)'_D = (\varphi_K \circ \overline{k}_\Lambda)'_D = (\tilde{k}_\Lambda \circ \varphi_\oplus)' = i'_\Pi \circ \tilde{k}'_\Lambda$

d'où le résultat puisque i'_Π est injective, et $\tilde{k}'_\Lambda$ aussi comme transposée topologique de l'application $\tilde{k}_\Lambda$ qui est surjective par définition .

*

* **Theoreme 5 :** CARACTERISATION ALGEBRIQUE DU DUAL DE L'ESPACE INDUCTIF DE SOBOLEV .

Soit $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev D-normal . Le dual topologique de l'espace inductif associé $\xrightarrow{K}(\Lambda ; E_\lambda)$ est algébriquement isomorphe au dual topologique $(\xleftarrow{D_K})'$ de D muni de la topologie induite par $\xrightarrow{K}$.

Si de plus, la condition de $\Sigma(\Lambda)$- dualité est vérifiée, et si on désigne par $\Sigma(\Lambda_*)$ le système dual associé, et par H_* l'espace projectif de type dual correspondant, alors le dual topologique de $\xrightarrow{K}$ est algébriquement isomorphe à un sous-espace vectoriel de H_* .

D'après la proposition 6, $\varphi_K(D)$ est dense dans $\xrightarrow{K}$, et par conséquent K' est algébriquement isomorphe à $\varphi'_K(K')$, qui est l'espace des restrictions à D des formes linéaires continues sur $\xrightarrow{K}$, soit encore l'espace des formes linéaires continues sur D muni de la topologie de $\xrightarrow{K}$, ce qui démontre la première assertion .

Si la condition de $\Sigma(\Lambda)$ - dualité est vérifiée, le théorème 3 s'applique, et H_* est le dual de $\xrightarrow{D_K} = \xrightarrow{K(\Lambda ; D_\lambda)}$; or $D_\lambda < E_\lambda$ entraîne l'inclusion des systèmes $\Sigma_1(\Lambda) < \Sigma(\Lambda)$ et, d'après le théorème de conservation de l'inclusion vectorielle topologique (cf.chap.II th.4), celle des espaces inductifs correspondants $\xrightarrow{D_K} = \xrightarrow{K(\Lambda ; D_\lambda)} < \xrightarrow{K(\Lambda ; E_\lambda)}$, et par conséquent $\xrightarrow{D_K} < \xleftarrow{D_K}$; la transposée topologique de l'identité de D, considérée comme application linéaire continue de $\xrightarrow{D_K}$ dans $\xleftarrow{D_K}$ est donc une injection linéaire, et donc $K' = (\xleftarrow{D_K})' \subset (\xrightarrow{D_K})' = H_*$.

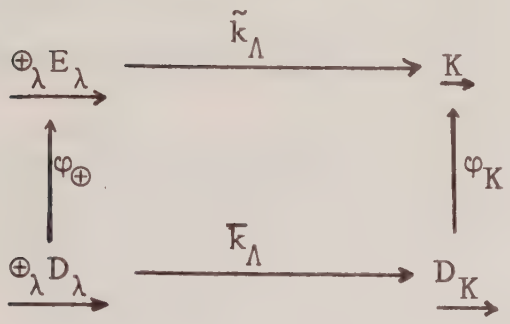
*

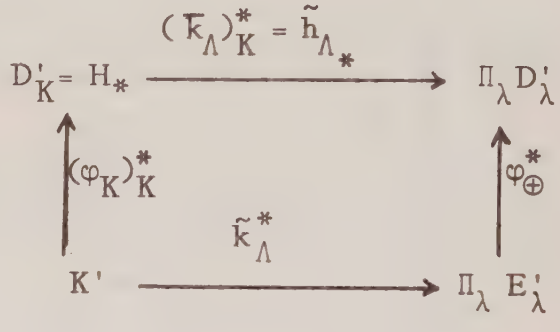
-113-

Corollaire :

Dans les hypothèses du théorème, la transposée topologique de l'homomorphisme inductif $\tilde{k}_\Lambda$ coïncide, dans l'identification algébrique, pour tout $\lambda \in \Lambda$, de E'_λ et D'_λ, avec la restriction à K' de l'homomorphisme projectif de type dual $\tilde{h}_{\Lambda_*}$.

Considérons en effet le diagramme transposé du diagramme vectoriel topologique : soit :



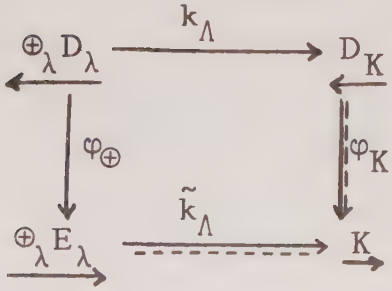


Alors $\varphi^*_\oplus$ est la bijection qui identifie $\Pi_\lambda E'_\lambda$ avec $\Pi_\lambda D'_\lambda$, $(\varphi_K)^*_K$ est l'injection canonique de K' dans H_*, mise en évidence par le théorème, et $(\bar{k}_\Lambda)^*_K = \tilde{h}_{\Lambda_*}$ d'après le corollaire du théorème 3 .

*

Intéressons-nous maintenant au problème de la coïncidence entre K' et H_* ; pour cela, nous allons vérifier que nous sommes dans les conditions d'application du deuxième théorème de transfert d'homomorphie (cf. chap.I th.11 et 15) .

Les e.l.c. $\oplus_\lambda E_\lambda$ et $K(\Lambda ; E_\lambda)$ sont séparés, et $\tilde{k}_\Lambda$ est un homomorphisme surjectif entre ces deux espaces ; $D_K = \varprojlim (\varphi_K ; K)$



est une limite improjective, dense d'après la proposition 6 ; $\bar{k}_\Lambda$ est surjective, et $\varphi_\oplus(D^{(\Lambda)})$ est dense dans $\oplus_\lambda E_\lambda$ (cf.corollaire de la proposition 4). La seule hypothèse restant à vérifier est que $\oplus_\lambda D_\lambda$ est une limite improjective de $\oplus_\lambda E_\lambda$; ceci résultera du lemme suivant :

-114-

Lemme :

Soient $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d' e.l.c. , et pour tout $\lambda\in\Lambda$, un sous-espace vectoriel F_λ de E_λ. Alors la somme directe topologique des sous-e.v.t. F_λ des E_λ est topologiquement isomorphe au sous-e.v.t. $\underleftarrow{\oplus_\lambda F_\lambda}$ de la somme directe topologique $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$, soit :

$$\underrightarrow{\oplus_\lambda \underleftarrow{F_\lambda}} \approx \underleftarrow{\oplus_\lambda F_\lambda}$$

Considérons en effet des bases $\mathfrak{B}_\lambda$ de voisinages V_λ convexes équilibrés de O dans chaque E_λ . Alors l'ensemble $\mathfrak{B} \cap \oplus_\lambda F_\lambda$ des

$$\Gamma(U_\lambda V_\lambda) \cap \oplus_\lambda F_\lambda = \{\oplus_\lambda \alpha_\lambda x_\lambda \in \oplus_\lambda F_\lambda : (\oplus_\lambda \alpha_\lambda \in [0,1]^{(\Lambda)})(\Sigma\, \alpha_\lambda \leq 1) \text{ et } (\forall\lambda)(x_\lambda \in V_\lambda)\}$$

forme une base de voisinages convexes équilibrés dans $\underleftarrow{\oplus_\lambda F_\lambda}$

(cf. chap.I parag. 2 ex. 2) .

Mais dire que $\oplus_\lambda \alpha_\lambda x_\lambda$ appartient à $\oplus_\lambda F_\lambda$ est équivalent à dire, (en supposant $x_\lambda = 0$ quand $\alpha_\lambda = 0$) que pour tout $\lambda\in\Lambda$, $\alpha_\lambda x_\lambda$ appartient à F_λ, ou encore $x_\lambda \in F_\lambda$. Donc les ensembles $\Gamma(U_\lambda V_\lambda) \cap \oplus_\lambda F_\lambda$ coïncident avec les

$$\Gamma(U_\lambda (V_\lambda \cap F_\lambda)) = \{\oplus_\lambda \alpha_\lambda x_\lambda : (\oplus_\lambda \alpha_\lambda \in [0,1]^{(\Lambda)})(\Sigma\, \alpha_\lambda \leq 1) \text{ et } (\forall\lambda)\,(x_\lambda \in V_\lambda \cap F_\lambda)\}$$

qui forment une base de voisinages convexes équilibrés de O dans $\underrightarrow{\underleftarrow{\oplus_\lambda F_\lambda}}$, d'où le résultat cherché . *

Nous sommes donc dans les conditions d'application du deuxième théorème d'homomorphie, dans le cas particulier où les applications $u = \overline{k}_\Lambda$ et $u_1 = \tilde{k}_\Lambda$ sont surjectives ; comme l'homomorphie de $\overline{k}_\Lambda$ est alors équivalente à l'égalité :

$$\underleftarrow{D_K} = \varinjlim (\overline{k}_\Lambda \,;\, \underrightarrow{\oplus_\lambda D_\lambda}) \qquad \text{(cf. chap. I th.8 corol. 1)} ,$$

(i.e. $\underleftarrow{D_K} = \underrightarrow{D_K}$), nous pouvons énoncer le résultat suivant :

* -115-

* **Theoreme 6 : COÏNCIDENCE DE K' ET DE H_* .**

Soient $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev D-normal, vérifiant la condition de $\Sigma(\Lambda)$ - dualité, $\Sigma(\Lambda_*)$ le système dual associé, et H_* l'espace projectif de type dual correspondant .

Une condition nécessaire et suffisante pour que le dual topologique de $\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda)$ coïncide avec H_* est que $\varinjlim D_K = \varinjlim K(\Lambda ; D_\lambda)$ coïncide topologiquement avec le sous-e.v.t. $\varprojlim D_K$ de $\varinjlim K(\Lambda ; E_\lambda)$, ou encore que la condition faible des noyaux soit vérifiée .

Dans le cas où le noyau de $\overline{k}_\Lambda$ admet un supplémentaire topologique dans $\varinjlim D_\lambda$, on peut remplacer la condition faible des noyaux par la condition forte (cf. chap.I th.14) qui signifie que le noyau de $\overline{k}_\Lambda$ est dense dans celui de $\tilde{k}_\Lambda$.

Remarque :

K' ne coïncide pas toujours avec H_* , mais il y a des cas où c'est vérifié . Il existe en effet des espaces projectifs de Sobolev semi-réflexifs dans lesquels D est dense (par exemple $\epsilon(\Omega)$: cf. chap. 2 parag. 1B . exemples) et d'autres dans lesquels il ne l'est pas (par exemple $H^{p,m}(\Omega)$ dans le cas où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$) . La remarque résultera alors de la proposition suivante, que nous vérifierons au prochain paragraphe, compte-tenu de ce que dans ce cas $H = H_{**}$:

" Si $\varprojlim H$ est un espace semi-réflexif , alors le dual topologique de $\varinjlim K_*$ n'est autre que H_o " .

* -116-

III.5 : ETUDE TOPOLOGIQUE DE LA DUALITE DES ESPACES DE SOBOLEV .

Soient E,F deux e.l.c. séparés, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue . En étudiant la transposée topologique de u, nous avons mis en évidence au premier paragraphe (cf. corollaires 2 et 3 du th.1) des topologies de dualité, faisant intervenir l'image $u(\mathfrak{S})$ d'une famille filtrante et homothétique de parties bornées de E, ou l'image réciproque $u^{-1}(\mathfrak{T})$ d'une famille analogue de bornés de F .

Nous allons nous intéresser, dans un premier temps, à l'homomorphie de la transposée topologique u^* de u, pour ces topologies de dualité ; puis nous appliquerons ces résultats à la dualité des espaces de Sobolev .

A : HOMOMORPHIE DE LA TRANSPOSEE TOPOLOGIQUE .

Lorsque les espaces E et F sont normés, nous avons le résultat classique suivant, que nous rappelons sans démonstration (cf. par exemple Schaefer chap.4 ou Grothendieck chap.2) :

* **Proposition 7** :

La transposée topologique d'un homomorphisme d'espaces vectoriels normés est un homomorphisme pour les topologies de dual fort.

Lorsque E et F ne sont pas normés, la proposition précédente tombe en défaut. Dans ce cas, nous aurons le théorème suivant :

* **Theoreme 7** : TRANSPOSEE TOPOLOGIQUE D'UNE APPLICATION DENSE.

Soient E,F deux e.l.c. séparés, $\mathfrak{S}$ une famille filtrante homothétique de parties bornées de E, et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue "dense" (i.e. dont l'image est dense dans F).

Alors sa transposée topologique u^* est un homomorphisme injectif de F' muni de la $u(\mathfrak{S})$-topologie, dans E' muni de la $\mathfrak{S}$-topologie. De façon équivalente : $F'_{u(\mathfrak{S})} = \varprojlim (u^* ; E'_{\mathfrak{S}})$

-117-

Puisque u est une application dense, sa transposée topologique u^* est injective ; d'après la caractérisation des homomorphismes (cf. chap.I th.8 corol.1), u^* sera un homomorphisme de $F'_{u(\mathfrak{S})}$ dans $E'_{\mathfrak{S}}$ si et seulement si $F'_{u(\mathfrak{S})} = \varprojlim (u^*; E'_{\mathfrak{S}})$.

Comme les polaires des images par u des éléments A de $\mathfrak{S}$ forment une base de voisinages de O pour la $u(\mathfrak{S})$ - topologie, et que les images réciproques par u^* des polaires des éléments de $\mathfrak{S}$ en forment une pour la limite projective, le théorème résultera du lemme suivant :

Lemme :

Soit u une application linéaire continue entre deux e.l.c. E et F . Pour toute partie A de E, nous avons l'égalité :

$$u(A)^\circ = (u^*)^{-1}(A^\circ)$$

En effet une forme linéaire continue y' sur F appartient à $(u^*)^{-1}(A^\circ)$ si et seulement si $u^*(y')$ appartient à A° ; cela signifie, par définition du polaire, que l'on a la relation :

$$(\forall x \in A) \ (|\langle u^*(y'), x \rangle| \leq 1)$$

équivalente, par définition de la transposée, à la relation :

$$(\forall x \in A) \ (|\langle y', u(x) \rangle| \leq 1)$$

qui signifie que y' appartient au polaire de $u(A)$.

*

Soit maintenant $\mathfrak{T}$ une famille filtrante et homothétique de parties bornées de F ; nous avons vu (cf. remarque du corollaire 3 du th.1) que $u^{-1}(\mathfrak{T})$ n'est pas nécessairement une famille de bornés de E, mais qu'elle l'est lorsque u est un homomorphisme injectif ; dans ces conditions , on peut se demander si u^* est alors un homomorphisme de F' muni de la $\mathfrak{T}$ - topologie, dans E' muni de la $u^{-1}(\mathfrak{T})$ - topologie .

La réponse est négative ; en effet, si E est un sous - e.v.t. dense dans un e.l.c. F , si i est l'injection canonique de E dans F, et σ l'ensemble des parties finies de F, $i^{-1}(\sigma)$ est l'ensemble des parties

-118-

finies de E , et i^* n'est pas un homomorphisme de F'_σ dans E'_σ , car la $\sigma(F',F)$ - topologie est strictement plus fine que la $\sigma(E',E)$ -topologie (cf. Schaefer, chap. 4) .

Grothendieck démontre le résultat suivant (chap.2, propos.21), que nous admettrons :

Proposition 8 :

Soient E un sous-espace fermé d'un e.l.c. séparé F , $\mathfrak{T}$ une famille filtrante et homothétique de parties convexes, équilibrées et faiblement compactes de F , et $\overline{\mathfrak{T}}$ la trace de $\mathfrak{T}$ sur E . Alors E' , muni de la $\overline{\mathfrak{T}}$ -topologie, est isomorphe à l' e.v.t.-quotient de F' par le polaire E° de E .

(Grothendieck signale que si E est fermé, mais que la condition sur $\mathfrak{S}$ n'est pas vérifiée, le résultat est faux) .

Considérons un homomorphisme injectif u entre deux e.l.c. E et F, et dont l'image u(E) est fermée dans F . E est alors isomorphe au sous-e.v.t. u(E) de F , et $u^{-1}(\mathfrak{T})$ correspond dans cet isomorphisme à la trace $\overline{\mathfrak{T}}$ de $\mathfrak{T}$ sur u(E) . D'autre part, comme u(E) est un espace vectoriel

$$u(E)^\circ = \{y' \in F' : (\forall x \in E)(\langle y', u(x) \rangle = 0)\}$$

$$= \{y' \in F' : (\forall x \in E)(\langle u^*(y'), x \rangle = 0)\} = \ker u^* ,$$

et par conséquent la proposition 8 signifie, sous cette nouvelle forme , que u^* est un homomorphisme de $F'_{\mathfrak{T}}$ dans $E'_{u^{-1}(\mathfrak{T})}$; enfin, comme la condition portant sur $\mathfrak{T}$ revient à dire que la $\mathfrak{T}$- topologie est moins fine que la topologie de Mackey $\tau(F',F)$, nous aurons le résultat équivalent suivant :

* - 119-

* Théorème 8 : TRANSPOSITION D'UN HOMOMORPHISME INJECTIF .

Soient E,F deux e.l.c. séparés, et u un homomorphisme injectif de E dans F, dont l'image est fermée dans F . Si l'on munit le dual F' d'une $\mathfrak{T}$ - topologie moins fine que la topologie de Mackey $\tau(F', F)$, alors la transposée topologique u^* de u est un homomorphisme surjectif de F' muni de la $\mathfrak{T}$ - topologie, dans E' muni de la $u^{-1}(\mathfrak{T})$ - topologie. De façon équivalente :

$$E'_{u^{-1}(\mathfrak{T})} = \varinjlim (u^* ; F'_{\mathfrak{T}})$$

Nous appellerons " condition de Mackey " la condition imposée à la $\mathfrak{T}$ - topologie d'être moins fine que la topologie de Mackey $\tau(F', F)$; il est équivalent de supposer que la $\mathfrak{T}$- topologie est compatible avec la dualité $\langle E', E \rangle$ (i.e. telle que $(E'_{\mathfrak{T}})' = E$) .

B : ASPECT TOPOLOGIQUE DE LA DUALITE DES ESPACES DE SOBOLEV .

Le problème étudié est de déterminer sous quelles conditions et pour quelles topologies, H'_o coïncide topologiquement avec l'espace inductif de type dual $\xrightarrow{K_*}$, et K' est un sous- e.v.t. de l'espace projectif de type dual $\xleftarrow{H_*}$.

Pour cela, nous aurons tout d'abord besoin du résultat suivant, analogue topologique de la proposition 1 (cf. Grothendieck chap. 4), que nous admettrons :

-120-

Proposition 9 : caractérisation topologique des duals topologiques des produits et sommes directes topologiques .

Considérons une famille d' e.l.c. $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, et, pour tout $\lambda\in\Lambda$, une famille $\mathfrak{S}_\lambda$ filtrante, homothétique, totale de parties bornées, équilibrées de E_λ . Alors

(1) l'ensemble $\mathfrak{S}_\Pi = \{ \Pi_\lambda A_\lambda : (\forall\lambda\in\Lambda)\,(A_\lambda \in \mathfrak{S}_\lambda) \}$

forme une famille filtrante, homothétique, totale de parties bornées de $\varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda$, et de même $\mathfrak{S}_\oplus = \{(\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{M}} A_\lambda) \oplus \{0\}^{\Lambda-\mathfrak{M}} : (\mathfrak{M}\in \mathrm{pf}\,\Lambda) \text{ et } (\forall\lambda\in\mathfrak{M})\,(A_\lambda \in \mathfrak{S}_\lambda)\}$

en est une pour $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$.

(2) Le dual topologique de $\varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda$ (resp. $\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda$) , muni de la $\mathfrak{S}_\Pi$-topologie (resp. $\mathfrak{S}_\oplus$ - topologie) est topologiquement isomorphe à la somme directe topologique (resp. produit vectoriel topologique) des E'_λ munis des $\mathfrak{S}_\lambda$ - topologies respectives , soit :

$$\left(\varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda\right)'_{\mathfrak{S}_\Pi} \approx \varinjlim \oplus_\lambda E'_{\lambda,\mathfrak{S}_\lambda} \qquad \text{et} \qquad \left(\varinjlim \oplus_\lambda E_\lambda\right)'_{\mathfrak{S}_\oplus} \approx \varprojlim \Pi_\lambda E'_{\lambda,\mathfrak{S}_\lambda}$$

En particulier, pour les topologies de dual fort (resp. de Mackey), nous avons :

$$\beta(\Pi',\Pi) = \oplus_\lambda \beta(E'_\lambda,E_\lambda) \quad , \quad \beta(\oplus',\oplus) = \Pi_\lambda \beta(E'_\lambda, E_\lambda)$$

$$\text{resp. } \tau(\Pi',\Pi) = \oplus_\lambda \tau(E'_\lambda,E_\lambda) \quad , \quad \tau(\oplus',\oplus) = \Pi_\lambda \tau(E'_\lambda, E_\lambda) \ ;$$

on vérifie facilement que le résultat analogue est faux pour les topologies de dual faible (cf. Schaefer chap. 4) .

Nous allons étudier les trois cas d' homomorphie mis en évidence dans la première partie du paragraphe :

* -121 -

(1) Nous pourrons appliquer la proposition 7 lorsque les espaces de Sobolev sont normés, en particulier lorsque Λ est finie et les E_λ normés (cf. chap. II propos. 1 et 4) ; nous aurons alors le résultat suivant, qui généralise, dans le cas des e.v.n. , le théorème analogue sur les espaces de Sobolev classiques :

* **Theoreme 9 :** CARACTERISATION TOPOLOGIQUE DE LA DUALITE DES ESPACES DE SOBOLEV DANS LE CAS NORME .

Soient Λ une famille de Sobolev finie , de base D' fort , $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev ne faisant intervenir que des e.v.n. E_λ , $\Sigma_\beta(\Lambda_*)$ le système dual fort associé, i.e. pour les topologies de dual fort $\beta(E'_\lambda, E_\lambda)$, $\underleftarrow{H_{*\beta}}$ et $\underrightarrow{K_{*\beta}}$ les espaces projectif et inductif correspondants .

Alors la fermeture $\underleftarrow{H_o}$ de D dans $\underleftarrow{H(\Lambda ; E_\lambda)}$ admet pour dual fort l'espace inductif de type dual $\underrightarrow{K_{*\beta}}$, et $\underrightarrow{K(\Lambda ; E_\lambda)}$ admet pour dual un sous-e.v.t. de l'espace projectif de type dual $\underleftarrow{H_{*\beta}}$.

En effet, la restriction h°_Λ de $\tilde{h}_\Lambda$ à H_o , est un homomorphisme de $\underleftarrow{H_o}$ dans $\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}$, par conséquent sa transposée topologique est un homomorphisme pour les topologies de dual fort ; or ce n'est autre que $\tilde{k}_{\Lambda_*}$ d'après le corollaire du théorème 4 .

De même, d'après le corollaire du théorème 5, la transposée topologique de l'homomorphisme $\tilde{k}_\Lambda$ de $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$ dans $\underrightarrow{K}$, est la restriction à K' de $\tilde{h}_{\Lambda_*}$; comme c'est un homomorphisme,

$K'_\beta = \underleftarrow{\lim}\,(\tilde{h}_{\Lambda_*} \circ i\ ;\ \Pi_\lambda E'_{\lambda,\beta}) = \underleftarrow{\lim}\,(i\ ,\ \underleftarrow{H_*})$ où i est l'injection canonique de K' dans H_* .

*

* -122-

(2) Dans le cas non normé, l'application du théorème 7 à l'homomorphisme surjectif de Sobolev $\tilde{k}_\Lambda$ nous permet de préciser pour quelle topologie le dual de $\underrightarrow{K}$ est sous-e.v.t. de $\underleftarrow{H_*}$.

* **Theoreme 10** : CARACTERISATION TOPOLOGIQUE DE LA DUALITE DE L'ESPACE INDUCTIF $\underrightarrow{K(\Lambda ; E_\lambda)}$.

Soient $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev D-normal vérifiant la condition de $\Sigma(\Lambda)$-dualité, $\Sigma(\Lambda_*)$ le système dual associé , $\underleftarrow{H_*}$ l'espace projectif associé à $\Sigma(\Lambda_*)$.

Alors, si $\mathfrak{S}_\oplus$ est la famille de bornés de $\underrightarrow{\oplus_\lambda E_\lambda}$ définie à la proposition 9, et si $\mathfrak{S}_K$ désigne la famille image de $\mathfrak{S}_\oplus$ par $\tilde{k}_\Lambda$, alors K', muni de la $\mathfrak{S}_K$- topologie, est un sous-e.v.t. de l'espace projectif de type dual $\underleftarrow{H_*}$.

L'homomorphie de la transposée topologique de $\tilde{k}_\Lambda$ résulte du théorème 7 ; la suite de la démonstration est en tout point identique à celle de la deuxième partie du théorème 9 .

*

(3) De même, nous aurons, en utilisant les hypothèses du théorème 8 :

* **Theoreme 11** : CARACTERISATION TOPOLOGIQUE DE LA DUALITE DE LA FERMETURE $\underleftarrow{H_o}$ DE D DANS L'ESPACE PROJECTIF $\underleftarrow{H(\Lambda ; E_\lambda)}$.

Soient $\Sigma(\Lambda)$ un système de Sobolev D-normal vérifiant la condition de $\Sigma(\Lambda)$-dualité, $\Sigma(\Lambda_*)$ le système dual associé, d'espace inductif associé $\underrightarrow{K_*}$.

Soient encore $\mathfrak{S}_\Pi$ la famille de bornés de $\underleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}$ définie à la proposition 9, et $\mathfrak{S}_{H_o}$ la famille image réciproque de $\mathfrak{S}_\Pi$ par l'homomorphisme injectif h°_Λ , restriction de $\tilde{h}_\Lambda$ à $\underleftarrow{H_o}$.

Alors, si la $\mathfrak{S}_\Pi$ - topologie vérifie la condition de Mackey , (en particulier si les $\mathfrak{S}_\lambda$ - topologies vérifient toutes les conditions de Mackey respectives) , le dual topologique de $\underleftarrow{H_o}$, muni de la $\mathfrak{S}_{H_o}$-topologie, est topologiquement isomorphe à l'espace inductif de type dual $\underrightarrow{K_*}$.

* -123-

Le théorème 8 supposait d'abord que l'image de l'homomorphisme injectif considéré est fermée dans l'espace image . Or d'après le théorème 7 du chapitre II , $\tilde{h}_\Lambda(H)$ est fermé dans $\varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda$; l'isomorphie de $\varprojlim H$ et du sous-e.v.t. $\varprojlim \tilde{h}_\Lambda(H)$ de $\varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda$ entraîne que $h^\circ_\Lambda(H_o) = \tilde{h}_\Lambda(H_o)$ est fermé dans $\varprojlim \tilde{h}_\Lambda(H)$, et par conséquent dans $\varprojlim \Pi_\lambda E_\lambda$; cette première condition est donc bien vérifiée .

Compte-tenu de la condition de Mackey, la transposée topologique de h°_Λ est un homomorphisme (surjectif) de $\varinjlim \oplus_\lambda E'_\lambda, \mathfrak{S}_\lambda$ dans $(H_o)'_{\mathfrak{S}_{H_o}}$; comme elle coïncide avec $\tilde{k}_{\Lambda_*}$ dans l'identification algébrique de H'_o et de K_* , on a

$$(H_o)'_{\mathfrak{S}_{H_o}} = \varinjlim (k_{\Lambda_*} ; \varinjlim \oplus_\lambda E'_\lambda, \mathfrak{S}_\lambda) = \varinjlim K_*$$

*

Nous aurons le cas particulier très important suivant, résultat analogue à celui du théorème 9, qui se généralise ainsi au cas non borné en utilisant les topologies de Mackey au lieu des topologies fortes :

* Corollaire 1 : CAS PARTICULIER DES TOPOLOGIES DE MACKEY .

Soient $\Sigma(\Lambda)$ un système D - normal, de " base de Mackey " (i.e. D' muni de la topologie de Mackey $\tau(D',D)$), $\Sigma_\tau(\Lambda_*)$ le " système dual de Mackey " associé (i.e. pour les topologies de Mackey $\tau(E'_\lambda, E_\lambda)$), et $\varinjlim K_{*_\tau}$ l'espace inductif de type dual correspondant .

Alors $\varinjlim K_{*_\tau}$ est topologiquement isomorphe au dual de $\varprojlim H_o$, muni de la topologie de Mackey $\tau(K_*, H_o)$.

$\varinjlim K_*$ est un espace de Mackey comme limite inductive par $\tilde{k}_\Lambda$ de l'espace de Mackey $\varinjlim \oplus_\lambda E'_{\lambda,\tau}$; sa topologie est donc $\tau(K_*, (\varinjlim K_*)')$,

* -124-

et le corollaire revient ainsi à montrer que cette topologie n'est autre que $\tau((\overleftarrow{H_o})', H_o)$, soit $\tau(K_*, H_o)$ dans l'identification algébrique (cf.th.4).

Or $\overrightarrow{K_*}$ est topologiquement isomorphe au dual de $\overrightarrow{\oplus_\lambda E'_{\lambda,\tau}}/\ker \tilde{k}_\Lambda$;

son dual topologique est donc algébriquement isomorphe à celui de l'espace quotient, et donc à l'espace des formes linéaires continues sur $\overrightarrow{\oplus_\lambda E'_{\lambda,\tau}}$ s'annulant sur le noyau de $\tilde{k}_\Lambda$, c'est-à-dire au polaire de $\ker \tilde{k}_\Lambda$ dans la dualité $(\oplus_\lambda E'_\lambda, \Pi_\lambda E_\lambda)$; comme le noyau de $\tilde{k}_\Lambda$ est lui-même le polaire de $\tilde{h}_\Lambda(H_o)$ dans la même dualité (cf. démonstration du th.8), $(\overrightarrow{K_*})'$ coïncide donc algébriquement avec le bipolaire de $h_\Lambda(H_o)$, c'est-à-dire avec H_o puisque cet espace est isomorphe à $h_\Lambda(H_o)$ qui est fermé dans $\overleftarrow{\Pi_\lambda E_\lambda}$, et par conséquent aussi pour la topologie faible $\sigma(\Pi_\lambda E_\lambda, \oplus_\lambda E'_\lambda)$, puisque les parties convexes fermées sont les mêmes pour les deux topologies (cf. chap.I lemme 3 du th.15). *

Nous aurons aussi l'analogue du théorème 9 pour les topologies fortes, dans le cas où D et les E_λ sont semi-réflexifs :

* **Corollaire 2** : CAS DES ESPACES SEMI-REFLEXIFS .

Soient $\Sigma(\Lambda)$ un système D-normal, de base D' fort, $\Sigma_\beta(\Lambda_*)$ le système dual fort associé, et $\overrightarrow{K_{*\beta}}$ l'espace inductif de type dual correspondant.

Alors, si D et les E_λ sont semi-réflexifs, $\overrightarrow{K_{*\beta}}$ est topologiquement isomorphe au dual fort de $\overleftarrow{H_o}$.

En effet, l'espace projectif $\overleftarrow{H(\Lambda ; E_\lambda)}$ est alors semi-réflexif (cf. chap.II, th.7, corol.3) et $\overleftarrow{H_o}$ l'est aussi comme sous-espace fermé d'un espace semi-réflexif ; le dual fort de ce dernier coïncide donc avec le dual de Mackey, puisqu'il est tonnelé (cf. Schaefer chap.4). Il en est de même pour D' , et le corollaire 2 résulte donc du corollaire 1 .

*

-125-

Démontrons pour finir la proposition énoncée à la fin du paragraphe 5 .

Proposition 10 :

Si $\overleftarrow{H}$ est un espace semi-réflexif, alors le dual topologique de $\overrightarrow{K_{*\beta}}$ n'est autre que H_o .

D'après le corollaire 2, $\overrightarrow{K_{*\beta}}$ coïncide topologiquement avec le dual fort de $\overleftarrow{H_o}$, et par conséquent le dual topologique de $\overrightarrow{K_{*\beta}}$ est le bidual de $\overleftarrow{H_o}$; comme $\overleftarrow{H_o}$ est alors semi-réflexif , il coïncide algébriquement avec son bidual, d'où le résultat cherché .

*

-126-

III.6 : APPLICATIONS DES THEOREMES DE DUALITE AUX ESPACES DE SOBOLEV CLASSIQUES, ET A CERTAINS ESPACES DE DISTRIBUTIONS .

L'application des théorèmes précédents aux espaces projectifs de Sobolev cités en exemple au chapitre II permet d'obtenir leurs duals topologiques sous forme d'espaces inductifs de Sobolev ; nous obtiendrons ainsi directement tous les théorèmes classiques correspondants .

A : ESPACES DE SOBOLEV CLASSIQUES ET ESPACES DERIVES .

1° : $H^{p,m}(\Omega)$, $W_\sigma^{p,m}(\Omega)$

Au chapitre II, nous avons rappelé la définition des espaces de Sobolev classiques : $\overleftarrow{H^{p,m}(\Omega)} = \overleftarrow{H(\Lambda_m ; L^p(\Omega))}$, et retrouvé leurs premières propriétés. Puisque, pour tout $p \in [\, 1, +\infty [$, le dual fort de $L^p(\Omega)$ est topologiquement isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$, pour $p' \in]\, 1, +\infty\,]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, l'application du théorème 9 entraîne que le dual fort de la fermeture $H_o^{p,m}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^{p,m}(\Omega)$ est l'espace inductif de Sobolev :

$$H^{p,-m}(\Omega) = \underrightarrow{K(\Lambda_m ; L^{p'}(\Omega))}$$

Nous voyons ici que la connaissance du dual de l'espace de " départ " $L^p(\Omega)$ suffit à caractériser le dual de H_o .

De même, la fermeture $\overset{o}{W}{}_\sigma^{p,m}$ de D dans l'espace de Sobolev avec poids $W_\sigma^{p,m}(\Omega) = \overleftarrow{H(\Lambda_m : L^p(\Omega ; \sigma))}$ a pour dual fort

$$W_\sigma^{p',-m}(\Omega) = \underrightarrow{K(\Lambda_m ; L^{p'}(\Omega ; \sigma))}$$

-127-

2° : $\underline{\Xi_{\rho}^{p,m}(\Omega)}$.

Nous avons vu qu'il s'agissait de l'espace projectif $\underleftarrow{H(\Lambda_{\rho,m} ; L^p(\Omega))}$ où $\Lambda_{\rho,m} = \{ \rho^{|\alpha|} D^{\alpha} : |\alpha| \leq m \}$. Comme la famille duale associée est la famille

$$\Lambda_{\rho,-m} = \{ [x' \longrightarrow D^{\alpha}(\rho^{|\alpha|} x')] : |\alpha| \leq m \}$$

(cf. parag.2) et comme $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\Xi^{p,m}(\Omega)$ du fait du choix de ρ (cf. Lions - Magénès chap. 6), pour $p \in [1, +\infty[$ et $p' \in]1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, nous aurons :

$$\left(\Xi^{p,m}(\Omega)\right)'_{\beta} = K(\Lambda_{\rho,-m} ; L^{p'}(\Omega)) = \Xi^{p,m}(\Omega)$$

3° : $\underline{\mathfrak{D}_{L^p}(\Omega)}$.

L'espace projectif $\mathfrak{D}_{L^p}(\Omega) = \underleftarrow{H(\Lambda_{\infty} ; L^p(\Omega))}$ n'est pas normé, mais il est réflexif (cf. chap. II parag.3) ; comme de plus $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathfrak{D}_{L^p}(\Omega)$, nous sommes dans les conditions d'application du corollaire 2 du théorème 11, et

$$\mathfrak{D}'_{L^p}(\Omega) = \underrightarrow{K(\Lambda_{\infty} ; L^{p'}(\Omega))}$$

4° : Espaces de Sobolev - Orlicz .

Nous pouvons de même définir des espaces de Sobolev à partir des espaces d'Orlicz (cf. Krasnoselski - Rutickii) . De façon précise, considérons deux espaces d'Orlicz $L_M^*(\Omega)$ et $L_N^*(\Omega)$ associés à deux fonctions de Young complémentaires M et N, et E_M (resp. E_N) la fermeture de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans L_M^* (resp. L_N^*) : nous pouvons alors considérer l'espace projectif

$$H_M^m = \underleftarrow{H(\Lambda_m ; E_M)}$$

-128-

associé au système D-normal $(\Lambda_m, h_m, k_m, (E_M)_{|\alpha| \leq m})$;
c'est un espace de Banach, puique L^*_M, et par conséquent E_M, l'est.

Comme le dual fort de l'espace E_M est l'espace L^*_N (cf. Krasnoselski-Rutickii, chap.2), le dual fort de la fermeture $\overset{\circ}{H}{}^m_M$ de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans H^m_M sera l'espace de Banach $K^{m*}_N = \underrightarrow{K(\Lambda_m ; L^*_N)}$

On définirait de la même façon des espaces de Sobolev à partir des treillis localement convexes normaux (cf. Robert).

B : APPLICATION AUX ESPACES DE DISTRIBUTIONS .

1° : Espaces $\mathfrak{D}^m(\Omega)$, $\mathfrak{D}'_F(\Omega)$.

L'espace $\mathfrak{D}^0(\Omega)$ des fonctions numériques continues à support compact contenu dans Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, est limite inductive, pour tout compact $K \subset \Omega$, des espaces $\mathfrak{D}^0_K(\Omega)$ des fonctions continues à support dans le compact K, munis des normes respectives de convergence uniforme .

C'est un espace normal de distributions, et son dual topologique, qui est l'espace $\mathfrak{M}_0(\Omega)$ des mesures de Radon, est un espace de distributions, aussi bien pour la topologie de dual fort que pour celle de Mackey (ces topologies sont distinctes, car l'espace $\mathfrak{D}^0(\Omega)$ n'est pas réflexif) .

Comme tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable d'une suite croissante de compacts $\{K_n\}$, supposons donnée une telle suite ; nous aurons alors une base de voisinages de O de $\mathfrak{D}^0(\Omega)$ en considérant les ensembles :

$$V_{\{\xi_n\}} = \{ \varphi \in \mathfrak{D}^0(\Omega) : (\forall n \in \mathbb{N}) (\sup_{x \notin K_n} |\varphi(x)| < \xi_n) \}$$

où $\{\xi_n\}$ est une suite décroissante de réels positifs, qui tend vers O .

- 129-

De même, l'espace $\mathcal{D}^m(\Omega)$ des fonctions C^m- différentiables à support compact, est limite inductive des espaces $\mathcal{D}^m_K(\Omega)$ des fonctions C^m- différentiables à support dans K, muni des normes d'espaces projectifs de Sobolev $\mathcal{D}^m_K(\Omega) = \underleftarrow{H(\Lambda_m ; \mathcal{D}^o_K(\Omega))}$; c'est un espace normal de distributions.

On démontre, en comparant les bases respectives de voisinages de O, que la topologie usuelle de $\mathcal{D}^m(\Omega)$ coïncide avec la topologie de l'espace projectif de Sobolev $\underleftarrow{H(\Lambda_m ; \mathcal{D}^o(\Omega))}$. L'application du premier corollaire du théorème 11 permet d'obtenir immédiatement les résultats suivants :

(1) Le dual topologique de $\mathcal{D}^m(\Omega)$ coïncide algébriquement avec l'espace inductif de Sobolev $K(\Lambda_m ; \mathcal{M}_o(\Omega))$, i.e. toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^m(\Omega)$ est somme de dérivées d'ordre $\leq m$ de mesures de Radon (ceci redémontre un résultat classique ; cf. Schwartz chap.3, ou Trèves chap. 24).

(2) $\mathcal{D}'^m(\Omega)$, muni de la topologie de Mackey, est topologiquement isomorphe à l'espace inductif de Sobolev $\underrightarrow{K(\Lambda_m ; \mathcal{M}_{o\tau}(\Omega))}$ pour $\mathcal{M}_o(\Omega)$ muni de la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{M}_o, \mathcal{D}^o)$.

Considérons maintenant l'espace $\mathcal{D}'_F(\Omega)$ des distributions qui sont somme finie de dérivées de mesures de Radon ; c'est donc l'espace inductif de Sobolev $K(\Lambda_\infty ; \mathcal{M}_o)$. Le théorème de caractérisation algébrique des espaces de type dual (th.3) permet de conclure que $\mathcal{D}'_F(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}_F(\Omega)$, espace $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie projective de Sobolev $\underleftarrow{H(\Lambda_\infty ; \mathcal{D}^o(\Omega))}$.

Topologiquement, $\mathcal{D}'_F(\Omega)$, muni de la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{D}'_F, \mathcal{D})$, sera isomorphe à l'espace inductif de Sobolev $\underrightarrow{K(\Lambda_\infty ; \mathcal{M}_{o\tau}(\Omega))}$, pour $\mathcal{M}_o(\Omega)$ muni de la topologie de Mackey $\tau(\mathcal{M}_o, \mathcal{D}^o)$.

-130-

2° : Espaces $\varepsilon^m(\Omega)$, $\varepsilon(\Omega)$.

L'espace $\varepsilon^0(\Omega)$ des fonctions continues est muni de la topologie de convergence uniforme sur les parties compactes de Ω ; c'est un espace normal de distributions, qui contient $\mathfrak{D}^0(\Omega)$ et vérifie les inclusions vectorielles topologiques : $\mathfrak{D}(\Omega) < \mathfrak{D}^0(\Omega) < \varepsilon^0(\Omega)$. $\mathfrak{D}^0(\Omega)$ est donc dense dans $\varepsilon^0(\Omega)$, et ε'^0 est ainsi un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathfrak{M}_0$ des mesures de Radon .

L'espace $\varepsilon^m(\Omega)$ des fonctions C^m - différentiables , muni de sa topologie usuelle, est l'espace projectif de Sobolev $\underleftarrow{H(\Lambda_m ; \varepsilon^0(\Omega))}$; comme $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\varepsilon^m(\Omega)$, le dual de $\varepsilon^m(\Omega)$ sera algébriquement isomorphe à l'espace inductif de Sobolev $K(\Lambda_m ; \varepsilon'^0(\Omega))$; ceci montre en particulier que tout élément de ε'^m est somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de mesures .

Du point de vue topologique, si l'on munit $\varepsilon'^0(\Omega)$ de la topologie de Mackey $\tau(\varepsilon'^0, \varepsilon^0)$, le dual de Mackey de $\varepsilon^m(\Omega)$ est l'espace inductif de Sobolev $\underrightarrow{K(\Lambda_m ; \varepsilon'^0_\tau(\Omega))}$.

De même, l'espace $\varepsilon(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables, muni de sa topologie usuelle, n'est autre que l'espace projectif de Sobolev $\underleftarrow{H(\Lambda_\infty ; \varepsilon^0(\Omega))}$; comme $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\varepsilon(\Omega)$, nous aurons $\varepsilon'(\Omega) = K(\Lambda_\infty ; \varepsilon'^0(\Omega))$.

D'autre part, comme $\varepsilon(\Omega)$ est un espace de Montel (cf. Schwartz chap.3), $\varepsilon(\Omega)$ est réflexif ; si $\varepsilon'^0(\Omega)$ est muni de la topologie de Mackey $\tau(\varepsilon'^0, \varepsilon^0)$, le dual fort de $\varepsilon(\Omega)$ sera topologiquement isomorphe à l'espace inductif de Sobolev $\underrightarrow{K(\Lambda_\infty ; \varepsilon'^0_\tau(\Omega))}$.

-131-

3° : Espaces $\mathfrak{B}_o^m(\Omega)$, $\mathfrak{B}_o(\Omega)$; espace des distributions intégrables.

L'espace $\mathfrak{C}_o(\Omega) = \mathfrak{B}_o^o(\Omega)$ des fonctions continues, qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$ de Ω, est un espace de Banach, non réflexif, pour la norme de convergence uniforme ; c'est un espace normal de distributions (cf. Horvath chap.4, parag.5) dont le dual fort est l'espace de Banach $\mathfrak{M}_1(\Omega)$ des mesures de Radon bornées, muni de la norme de variation totale (cf. Edwards chap.4, exercice 45 , et Kelley-Namioka chap.4, sec. 14, problème J(b)) .

L'espace $\mathfrak{B}_o^m(\Omega)$ des fonctions C^m - différentiables , qui s'annulent sur $\partial\Omega$ ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leq m$, est l'espace projectif de Sobolev $\underleftarrow{H(\Lambda_m ; \mathfrak{C}_o(\Omega))}$; c'est donc un espace de Banach. Comme $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathfrak{B}_o^m(\Omega)$, l'application du théorème 9 permet de conclure que le dual fort de $\mathfrak{B}_o^m(\Omega)$ est l'espace inductif de Sobolev $\underrightarrow{K(\Lambda_m ; \mathfrak{M}_1(\Omega))}$. En particulier, toute forme linéaire continue sur $\mathfrak{B}_o^m(\Omega)$ est somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de mesures bornées .

L'espace $\mathfrak{B}_o(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables , nulles sur $\partial\Omega$, ainsi que toutes ses dérivées, est l'espace projectif de Sobolev $\underleftarrow{H(\Lambda_\infty ; \mathfrak{C}_o(\Omega))}$; c'est donc un espace de Fréchet .

D'autre part, c'est un espace normal de distributions (cf. Horvath) donc son dual topologique, espace des distributions intégrables sur Ω , est algébriquement l'espace inductif de Sobolev $K(\Lambda_\infty ; \mathfrak{M}_1(\Omega))$.

Topologiquement, si $\mathfrak{M}_1(\Omega)$ est muni de la topologie de Mackey $\tau(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{C}_o)$, le dual de Mackey de $\mathfrak{B}_o(\Omega)$ est l'espace inductif de Sobolev $\underrightarrow{K(\Lambda_\infty ; \mathfrak{M}_{1\tau}(\Omega))}$.

-132-

4° : Espace S des fonctions C^∞ à décroissance rapide ; distributions tempérées .

Comme nous l'avons vu au deuxième chapitre, l'espace $S(\mathbb{R}^n)$ des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide est l'espace projectif de Sobolev $\underleftarrow{H(\Lambda_{x,\infty} ; \mathfrak{C}_o(\mathbb{R}^n))}$

où $\Lambda_{x,\infty}$ est la famille de Sobolev $\Lambda_{x,\infty} = \{ x^\alpha D^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \}$

de famille duale $\Lambda_{x,-\infty} = \{ [x' \longrightarrow D^\beta(x^\alpha x')] : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \}$

(cf. parag.2, exemples) .

Puisque $S(\mathbb{R}^n)$ est un espace normal de distributions, son dual topologique $S'(\mathbb{R}^n)$, espace des distributions tempérées, sera algébriquement isomorphe, d'après le théorème 4 , à l'espace inductif de Sobolev $K(\Lambda_{x,-\infty} ; \mathfrak{M}_1(\mathbb{R}^n))$. Et, du point de vue topologique, puisque $S(\mathbb{R}^n)$ est un espace réflexif, son dual fort est topologiquement isomorphe à l'espace inductif de Sobolev $\underrightarrow{K(\Lambda_{x,-\infty} ; \mathfrak{M}_{1\tau}(\mathbb{R}^n))}$, où $\mathfrak{M}_{1\tau}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des mesures bornées, muni de la topologie de Mackey $\tau(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{C}_o)$.

On retrouverait de façon analogue les résultats correspondants pour les espaces S_k^m , S^m, S_k , $\mathcal{O}_c^m$, $\mathcal{O}_c$, $\mathcal{O}_M$ et leurs duals, définis dans le livre d'Horvath cité en bibliographie ; on peut obtenir aussi une autre caractérisation de S et S' comme espaces de Sobolev (cf.Horvath).

BIBLIOGRAPHIE

(1) BOURBAKI, N. :
Espaces Vectoriels Topologiques .
(Vol.1 : 1966 ; Vol.2 : 1964. Hermann . Paris)

(2) BREZIS, H. :
Les Opérateurs Monotones.
(Séminaire Choquet 1965/66 ; n° 10)

(3) BRUHAT, F. :
Distributions sur un groupe localement compact, et applications à l'étude des représentations des groupes $\mathfrak{p}$-adiques.
(Bull. Soc. Math. France : 89, 1961, pp 43 à 75)

(4) DIEUDONNE, J. :
Eléments d'Analyse (2) .
(1968 ; Gauthier-Villars, Paris)

(5) EDWARDS, R.E. :
Functional Analysis .
(Holt, Rinehart and Winston 1965)

(6) GARSOUX, J. :
Espaces vectoriels topologiques et distributions.
(1963 ; Dunod, Paris)

(7) GROTHENDIECK, A. :
Espaces vectoriels topologiques.
(3 ème ed. 1964 ; Universidade de São Paulo)

(8) HORVATH :
Topological vector spaces and distributions, vol. 1 .
(1968 ; Addison Wesley)

(9) KELLEY, J.L. :
General topology .
(1955 ; Van Nostrand)

(10) KELLEY-NAMIOKA :
Linear topological spaces .
(1963 ; Van Nostrand)

(11) KRASNOSELSKI, M.A. :
Topological Methods on non linear Analysis.
(1964 ; International Series , Pergamon Press)

(12) KRASNOSELSKI - RUTICKII :
Convex functions and Orlicz spaces .
(1961 ; Noordhoff, Groningen)

(13) LERAY - LIONS :
Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder.
(Bull. Soc. Math. France 93, 1965, pp 97-107)

(14) LIONS - MAGENES :
Problèmes aux limites non homogènes. Tome 1 .
(1968 ; Dunod, Paris)

(15) NEČAS, J. :
Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.
(1967 ; Masson, Paris)

(16) ROBERT, J. :
Treillis localement convexes normaux .
(C.R. Acad. Sc. 1967, 264, pp 690-693)

(17) SCHAEFER, H.H. :
Topological Vector Spaces .
(1967 ; Macmillan Series)

(18) SCHWARTZ, L. :
Théorie des distributions .
(Nvlle ed. 1966 ; Hermann, Paris)

(19) TREVES, F. :
Topological Vector Spaces, distributions and kernels .
(1967 ; Academic Press)

(20) VIŠIK, M.I. :
Systèmes quasi-linéaires fortement elliptiques d'équations différentielles de forme divergente (en russe)
(Trudi. Moskov. Mat. Obš. t.12, 1963, pp. 125-184)

Boundary value problems for quasilinear strongly elliptic systems of divergent forms .
(Soviet Math. t.2 , 1961, pp. 643-647)

ERRATA

page II : $(D^{\alpha} x')_{|\alpha| \leq m}$ au lieu de $(\mathfrak{D}^{\alpha} x)_{|\alpha| \leq m}$

page 5 : Propriétés essentielles :

5° : Lorsque les E_λ sont séparés, une partie fermée de E est complète.

page 7 : Corollaire 2 : Inclusion des produits vectoriels topologiques.

lire (et ceci sans ....) au lieu de (et ceci sous ...)

page 16 : Corollaire 2 : Inclusion des sommes directes topologiques.

lire (et ceci sans ...) au lieu de (et ceci sous ...)

page 76 : Proposition 2 :

1° : une partie A de $H(\Lambda ; E_\lambda)$ est bornée (resp. précompacte) si et seulement si ses images $\lambda(A)$ sont respectivement bornées (resp. précompactes) dans les espaces E_λ ; si A est fermée, alors A est complète (resp. compacte) si et seulement si ses images le sont dans les E_λ .

(La correction est immédiate dans la démonstration)

page 77 : Theoreme 7 : FERMETURE DE $H(\Lambda ; E_\lambda)$ DANS L'ESPACE-PRODUIT.

lire $\underset{\leftarrow}{\Pi_\lambda E_\lambda}$ au lieu de $\underline{\Pi_\lambda E_\lambda}$.

page 127 :

3° : prendre $\Omega = \mathbb{R}^n$.